



TREBALL FINAL DE GRAU



ESCOLA
POLITÈCNICA SUPERIOR
UNIVERSITAT DE LLEIDA
INSPIRING THE FUTURE

Estudiant: Óscar Palacín Domínguez

Titulació: Grau en Enginyeria Electrònica Industrial i Automàtica

Títol de Treball Final de Grau: **Material Docent de Baix Pressupost per a Pràctiques de Teoria Bàsica de Control**

Director/a: **Tomàs Pallejà Cabré**

Presentació

Mes: Juny

Any: 2020

Agraïments

Abans d'entrar en detall amb l'explicació del projecte, m'agradaria agrair a totes aquelles persones que han fet possible la seva realització.

En concret a Tomàs Pallejà Cabré, tutor del projecte i un dels pilars fonamentals en la seva realització. Oferint en tot moment un tracte proper i incondicional; sense oblidar el seu gran compromís.

També, agrair a tots els companys/es i professors/es que han contribuït en aquesta etapa acadèmica, donant-me les habilitats tècniques i socials per poder afrontar les futures etapes.

Per últim, i no menys important, agrair a la meua família el sacrifici i suport ofert durant el transcurs d'aquest trajecte.

Abstrac

Aquest projecte presenta una placa electrònica de baix cost per implantar fàcilment i de manera intuïtiva controladors P, PI, PD i PID; per tal de millorar el comportament d'unes plantes. Es dissenyaran cinc plantes diferents amb la finalitat de que els alumnes no obtinguin les mateixes funcions de transferència. Les plantes estaran formades per combinacions de circuits RLC. L'adquisició d'aquests components ha de suposar una despesa mínima, pel que s'haurà de fer una cerca exhaustiva en diferents fonts de subministrament, per obtenir combinacions ideals a un preu reduït.

El treball pretén crear material didàctic per l'assentament dels coneixements teòrics adquirits en l'assignatura de Teoria de Control.

Paraules clau: Control, P, I, PI, PD, PID, Circuits RLC i material didàctic.

Índex de continguts

Agraïments	ii
Abstrac	iii
Índex de continguts	i
Índex de taules	iv
Índex de figures	vi
Introducció	x
1. Disseny de plantes amb combinacions de components RLC	2
1.1. Primera planta	3
1.2. Segona planta	7
1.3. Tercera planta	10
1.4. Quarta planta	12
1.5. Cinquena planta	15
2. Disseny resposta transitòria i estacionària	19
2.1. Sistemes de primer ordre	19
2.1.1. Resposta esglaió unitari	19
2.1.2. Resposta rampa unitària	20
2.1.3. Resposta impuls unitari	21
2.2. Sistemes de segon ordre	22
2.2.1. Definicions de les especificacions de la resposta transitòria	24
2.3. Sistemes d'ordre superior	26
2.4. Anàlisi d'estabilitat en el pla complex	27
2.5. Error en estat estacionari en els sistemes de control amb realimentació unitària	28
3. Accions bàsiques de control	30
3.1. Acció de control Proporcional (P)	30
3.2. Acció control Integral (I)	30
3.3. Acció de control Proporcional – Integral (PI)	31
3.4. Acció de control Proporcional – Derivativa (PD)	32
3.5. Acció de control Proporcional – Integral – Derivativa (PID)	32
3.6. Implementació electrònica dels controladors	33
4. Anàlisi del lloc geomètric de les arrels	34
4.1. Condició d'angle i de magnitud	35
4.2. Disseny de sistemes de control mitjançant el mètode del lloc de les arrels	36
5. Anàlisi de sistemes de control pel mètode de la resposta en freqüència	37
5.1. Diagrama de Bode	38

5.1.1.	Freqüència de tall i ample de banda	39
5.1.2.	Factors bàsics	40
5.1.2.1.	Guany (K)	40
5.1.2.2.	Factors derivatius i integrals $j\omega \pm 1$	40
5.1.2.3.	Factors de primer ordre $((1 + j\omega T) \pm 1)$	42
5.1.2.4.	Factors quadràtics $1 + 2\xi j\omega\omega_n + j\omega\omega_n^2 \pm 1$	44
5.1.3.	Freqüència de ressonància (ω_r)	46
5.1.4.	Pic de ressonància (M_r)	46
5.1.5.	Relació entre el tipus de sistema i la corba de magnitud logarítmica	47
5.1.5.1.	Determinació de les constants d'error estàtic de posició	47
5.1.5.2.	Determinació de les constants d'error estàtic de velocitat	48
5.1.5.3.	Determinació de les constants d'error estàtic d'acceleració	48
5.2.	Diagrames de Nyquist	49
5.2.1.	Factors derivatiu i integral $j\omega \pm 1$	49
5.2.2.	Factors de primer ordre $1 + j\omega T \pm 1$	49
5.2.3.	Factors quadràtics $1 + 2\xi j\omega\omega_n + j\omega\omega_n^2 \pm 1$	50
5.2.4.	Formes generals dels diagrames polars	52
5.3.	Anàlisi d'estabilitat	54
5.3.1.	Criteri d'estabilitat de Nyquist	54
5.3.2.	Sistema condicionalment estable	57
5.3.3.	Anàlisi d'estabilitat relativa	57
5.3.3.1.	Marges de fase i de guany	58
5.3.4.	Marge de disc	60
5.3.4.1.	Relació amb els marges de guany i de fase	63
5.3.4.2.	Regions d'exclusió de Nyquist	65
5.3.4.3.	Aplicacions del marge de disc	65
6.	Modelatge de blocs de control	66
6.1.1.	Control primera planta	68
6.1.2.	Control segona planta	76
6.1.3.	Control tercera planta	82
6.1.4.	Control quarta planta	88
6.1.5.	Control cinquena planta	95
7.	Discretització	100
7.1.	Període de mostreig T_s	100
7.2.	Reconstrucció	103
7.3.	Transformada Z	104

7.3.1.	Transformada inversa de Z.....	105
7.3.2.	Diagrames de blocs en Z.....	106
7.3.3.	Correspondència entre el pla S i el pla Z.....	106
7.4.	Discretització dels blocs de control.....	108
8.	Pràctica associada a la placa per a estudiants del grau d'Enginyeria Electrónica i Automàtica Industrial de la Universitat de Lleida que cursin Teoria Bàsica de Control.	124
8.1.	Pregunta 1	124
8.2.	Pregunta 2	125
8.3.	Pregunta 3	126
8.4.	Pregunta 4	127
8.5.	Pregunta 5	128
8.6.	Pregunta 6	129
8.7.	Pregunta 7	130
9.	Conclusions	132
9.1.1.	Futurs passos.....	132
10.	Referències.....	133
10.1.1.	Bibliografia	133
10.1.2.	Webgrafia	133
10.1.3.	Pàgines web.....	133
11.	Annex I. Pressupost projecte.....	134
11.1.	Components electrònics.....	134
11.2.	Plaques PCB.....	135
11.3.	Cost total	135
12.	Annex II. Codi Arduino DUE: Implementació digital en equacions en diferències dels controladors	136

Índex de taules

Taula 1. Llei d'Ohm règim temporal i règim de Laplace components R-L-C	2
Taula 2. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Planta 1 (Matlab)	6
Taula 3. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Matlab vs Falstad Planta 1	6
Taula 4. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Planta 2 (Matlab).....	9
Taula 5. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Matlab vs Falstad Planta 2	9
Taula 6. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Planta 3 (Matlab).....	12
Taula 7. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Matlab vs Falstad Planta 3	12
Taula 8. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Planta 4 (Matlab).....	14
Taula 9. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Matlab vs Falstad Planta 4	14
Taula 10. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Planta 5 (Matlab).....	18
Taula 11. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Matlab vs Falstad Planta 5	18
Taula 12. Error en estat estacionari en termes del guany K	29
Taula 13. Configuració dels controladors.....	33
Taula 14. Equivalència controladors amb el seu semblant electrònic.....	34
Taula 15. Diagrames polars de funcions de transferència senzilles.....	53
Taula 16. Característiques resposta transitòria entrada esglaó, amplitud 0.35 V, més <i>ess</i> plantes primera fase	66
Taula 17. Marges estabilitat plantes primera fase.....	66
Taula 18. Controladors Planta 1	69
Taula 19. Equivalència Control-Components Planta 1	69
Taula 20. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35 V, Planta 1 més <i>ess</i> rampa unitària (Matlab)	74
Taula 21. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35 V, Planta 1 (Falstad).....	75
Taula 22. Marges estabilitat controladors Planta 1	75
Taula 23. Controladors Planta 2	76
Taula 24. Equivalència Control-Components Planta 2	76
Taula 25. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35 V, Planta 2 més <i>ess</i> rampa unitària (Matlab)	81
Taula 26. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35 V, Planta 2 (Falstad).....	82
Taula 27. Marges estabilitat controladors Planta 2	82
Taula 28. Controladors Planta 3	83
Taula 29. Equivalència Control-Components Planta 3	83
Taula 30. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35 V, Planta 3 més <i>ess</i> rampa unitària (Matlab)	87
Taula 31. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35 V, Planta 3 (Falstad).....	88
Taula 32. Marges estabilitat controladors Planta 3	88
Taula 33. Controladors Planta 4	89
Taula 34. Equivalència Control-Components Planta 4	89
Taula 35. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35 V, Planta 4 més <i>ess</i> rampa unitària (Matlab)	94
Taula 36. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35 V, Planta 4 (Falstad).....	94
Taula 37 . Marges estabilitat controladors Planta 4	94

Taula 38. Controladors Planta 5	95
Taula 39. Equivalència Control-Components Planta 5	95
Taula 40. Característiques resposta entrada esglaió, amplitud 0.35 V, Planta 5 més <i>ess</i> rampa unitària (Matlab)	99
Taula 41. Característiques resposta entrada esglaió, amplitud 0.35 V, Planta 5 (Falstad).....	99
Taula 42. Marges estabilitat controladors Planta 4	99
Taula 43. Transformacions de règim continu a discret dels controladors	107
Taula 44. Controladors en equacions de diferències	108
Taula 45. Ample de banda ω_m dels sistemes de control	109
Taula 46. Període de mostreig teorema de Shannon-Nyquist dels sistemes de control	109
Taula 47. Transformacions de continu a discret dels sistemes de control	110
Taula 48. Taula comparativa resultats en llaç tancat.....	128
Taula 49. Comparativa de resultats del sistema compensat	131
Taula 50. Comparativa de resultats anàlisi d'estabilitat	131
Taula 51. Pressupost components plantes i controladors	134
Taula 52. Pressupost de la fabricació de les plaques PCB.....	135
Taula 53. Pressupost ma d'obra fabricació plaques PCB	135
Taula 54. Pressupost total	135

Índex de figures

Fig. 1. Esquema general de la planta.....	2
Fig. 2. Disseny Planta 1.....	3
Fig. 3. Llaç obert Planta 1	4
Fig. 4. Llaç tancat Planta 1	4
Fig. 5. Amplificació de la tensió diferencial del llaç obert en funció de la freqüència, UA741CDR (Texas Instruments)	5
Fig. 6. Matlab vs Falstad Planta 1	6
Fig. 7. Disseny Planta 2.....	7
Fig. 8. Llaç obert Planta 2	8
Fig. 9. Llaç tancat Planta 2	8
Fig. 10. Matlab vs Falstad Planta 2	9
Fig. 11. Disseny Planta 3.....	10
Fig. 12. Llaç obert Planta 3	11
Fig. 13. Llaç tancat Planta 3.....	11
Fig. 14. Matlab vs Falstad Planta 3	11
Fig. 15. Disseny Planta 4.....	12
Fig. 16. Llaç obert Planta 4	13
Fig. 17. Llaç tancat Planta 4	13
Fig. 18. Matlab vs Falstad Planta 4	14
Fig. 19. Disseny Planta 5.....	15
Fig. 20. Llaç obert Planta 5	17
Fig. 21. Llaç tancat Planta 5.....	17
Fig. 22. Matlab vs Falstad Planta 5	18
Fig. 23. Sistema de primer ordre.....	19
Fig. 24. Corba de resposta esglaó unitari sistema de primer de ordre	20
Fig. 25. Resposta rampa unitària sistema primer ordre.....	21
Fig. 26. Resposta impuls unitari sistema primer ordre	21
Fig. 27. Sistema segon ordre	22
Fig. 28. Definició paràmetres sistema segon ordre.....	22
Fig. 29. Corba de resposta esglaó unitari sistema segon ordre	24
Fig. 30. Regió del pla complex que satisfà les condicions $\xi > 0.4$ i $ts < 4/\sigma$	27
Fig. 31. Sistema genèric realimentació unitària	28
Fig. 32. Diagrama de blocs d'un controlador Proporcional.....	30
Fig. 33. Diagrama de blocs d'un controlador Integral	31
Fig. 34. Diagrama de blocs d'un controlador Proporcional – Integral.....	31
Fig. 35. Diagrama de blocs d'un controlador Proporcional – Derivatiu	32
Fig. 36. Diagrama de blocs d'un controlador Proporcional-Integral-Derivatiu	33
Fig. 37. Model del controlador PID presentat per Katsuhiki Ogata en el seu llibre Ingeniería de Control Moderna	33
Fig. 38. Sistema de control	35
Fig. 39. Efectes de la inserció d'un pol (esquerra) i de la inserció d'un zero (dreta) en el lloc geomètric de les arrels.....	36
Fig. 40. Sistema LTI	37
Fig. 41. Senyals sinusoidals d'entrada i sortida.	37
Fig. 42. Diagrama de Bode	39

Fig. 43. Freqüència de tall i ample de banda.....	39
Fig. 44. Diagrama de Bode factor integrador i derivatiu.....	41
Fig. 45. Diagrama de Bode factors de primer ordre.....	42
Fig. 46. Factors de primer ordre elevats al quadrat.....	43
Fig. 47. Corbes de magnitud logarítmica i corbes d'angle de fase de factor quadràtic derivador.....	44
Fig. 48. Corbes de magnitud logarítmica i corbes d'angle de fase de factor quadràtic integrador.....	45
Fig. 49. Sistema de control amb realimentació unitària	47
Fig. 50. Corba de magnitud logarítmica d'un sistema de tipus 0	47
Fig. 51. Corba de magnitud logarítmica d'un sistema de tipus 1	48
Fig. 52. Corba de magnitud logarítmica d'un sistema de tipus 2	48
Fig. 53. Diagrama de Nyquist	49
Fig. 54. Diagrama de Nyquist factor de primer ordre	50
Fig. 55. Diagrama de Nyquist factor quadràtic integrador.....	50
Fig. 56. Pic i freqüència de ressonància	51
Fig. 57. Diagrama de Nyquist factor quadràtic derivador	52
Fig. 58. Diagrama de Nyquist de sistemes de tipus 0, tipus 1 i tipus 2.	52
Fig. 59. Sistema en llaç tancat	54
Fig. 60. Diagrames de Nyquist de corbes tancades en el pla $F(s)$ quan el contorn en el pla s tanca: un pol (esquerra), un zero (centre) o el mateix nombre de pols que de zeros (dreta) ...	55
Fig. 61. Trajectòria de Nyquist	56
Fig. 62. Sistema condicionalment estable.....	57
Fig. 63. Sistema genèric realimentació unitària.	57
Fig. 64. Marges de fase i de guany en el diagrama de Bode.	58
Fig. 65. Marges de fase i de guany en el diagrama de Nyquist.	59
Fig. 66. Exemple gràfica funció margin(sys)	60
Fig. 67. Gràfica de Nyquist d'un sistema poc robust amb grans marges clàssics (guany i fase). 61	
Fig. 68. Esquema general sistema amb realimentació unitària amb factor de pertorbació.....	61
Fig. 69. Conjunt de variacions $D(\alpha, \sigma)$ d'un sistema genèric.....	62
Fig. 70. Intersecció disc amb cercle unitari i eix real.....	63
Fig. 71. Combinacions segures de guany i de fase	64
Fig. 72. Geometria per a variacions de guany admissibles per una variació de fase donada ϕ (esquerra) i variacions de fase admissible per a una variació de guany donada γ (dreta)	64
Fig. 73. Regions d'exclusió de Nyquist bassades en els marges de disc amb diferents desviacions	65
Fig. 74. Esquemàtic sistema de control genèric.....	67
Fig. 75. Esquemàtic Bloc Control + Planta 1	68
Fig. 76. Control Proporcional Planta 1	70
Fig. 77. Control Proporcional - Derivatiu Planta 1.....	70
Fig. 78. Control Integral Planta 1.....	70
Fig. 79. Control Proporcional-Integral Planta 1.....	71
Fig. 80. Control Proporcional-Integral-Derivatiu Planta 1.....	71
Fig. 81. Matlab vs Falstad Simulacions Control P Planta 1.....	71
Fig. 82. Matlab vs Falstad Simulacions Control PD Planta I	72
Fig. 83. Matlab vs Falstad Simulacions Control I Planta I	72
Fig. 84. Matlab vs Falstad Simulacions Control PI Planta I.....	73
Fig. 85. Matlab vs Falstad Simulacions Control PID Planta I.....	73

Fig. 86. Esquemàtic Bloc Control + Planta 2	76
Fig. 87. Control Proporcional Planta 2	77
Fig. 88. Control Proporcional-Derivatiu Planta 2	77
Fig. 89. Control Integral Planta 2.....	77
Fig. 90. Control Proporcional-Integral Planta 2.....	78
Fig. 91. Control Proporcional-Integral-Derivatiu Planta 2.....	78
Fig. 92. Matlab vs Falstad Simulacions Control P Planta 2.....	78
Fig. 93. Matlab vs Falstad Simulacions Control PD Planta 2	79
Fig. 94. Matlab vs Falstad Simulacions Control I Planta 2	79
Fig. 95. Matlab vs Falstad Simulacions Control PI Planta 2	80
Fig. 96. Matlab vs Falstad Simulacions Control PID Planta 2	80
Fig. 97. Esquemàtic Bloc Control + Planta 3.....	82
Fig. 98. Control Proporcional Planta 3	83
Fig. 99. Control Integral Planta 3.....	84
Fig. 100. Control Proporcional-Integral Planta 3.....	84
Fig. 101. Control Proporcional-Integral-Derivatiu Planta 3.....	84
Fig. 102. Matlab vs Falstad Simulacions Control P Planta 3.....	85
Fig. 103. Matlab vs Falstad Simulacions Control I Planta 3	85
Fig. 104. Matlab vs Falstad Simulacions Control PI Planta 3	86
Fig. 105. Matlab vs Falstad Simulacions Control PID Planta 3	86
Fig. 106. Esquemàtic Bloc Control + Planta 4.....	88
Fig. 107. Control Proporcional Planta 4	90
Fig. 108. Control Integral Planta 4.....	90
Fig. 109. Control Proporcional-Integral Planta 4.....	90
Fig. 110. Control Proporcional-Integral-Derivatiu Planta 4.....	90
Fig. 111. Matlab vs Falstad Simulacions Control P Planta 4.....	91
Fig. 112. Matlab vs Falstad Simulacions Control I Planta 4	91
Fig. 113. Matlab vs Falstad Simulacions Control PI Planta 4	92
Fig. 114. Matlab vs Falstad Simulacions Control PID Planta 4	92
Fig. 115. Senyal sortida primer AO Planta 4 Control PI.....	93
Fig. 116. Esquemàtic Bloc Control + Planta 5.....	95
Fig. 117. Control Proporcional Planta 5	96
Fig. 118. Control Integral Planta 5.....	96
Fig. 119. Control Proporcional-Integral Planta 5.....	96
Fig. 120. Matlab vs Falstad Simulacions Control P Planta 5.....	97
Fig. 121. Matlab vs Falstad Simulacions Control I Planta 5	97
Fig. 122. Matlab vs Falstad Simulacions Control PI Planta 5	98
Fig. 123. Senyal sortida primer AO Planta 5 Control PI.....	98
Fig. 124. Sistema discret genèric amb realimentació unitària	100
Fig. 125. Espectre en freqüència d'una senyal genèrica $f(t)$ sense aliasing	101
Fig. 126. Espectre en freqüència d'una senyal genèrica $f(t)$ amb aliasing	101
Fig. 127. Amplada de banda (ω_m) sistemes tipus 0	101
Fig. 128. Diagrama de Bode Controlador I Planta 1	102
Fig. 129. Retenidor d'ordre zero	103
Fig. 130. Reconstrucció retenidor d'ordre zero	103
Fig. 131. Retenidor d'ordre zero.	103
Fig. 132. Sistema genèric en el domini de les Z.....	104
Fig. 133. Sistema de control amb blocs continus i discrets.....	106

Fig. 134. Franja primària (pla S) i cercle unitari (pla Z).....	106
Fig. 135. Exemple esquemàtic implementat en Simulink	108
Fig. 136. Digitalització Planta 1	111
Fig. 137. Digitalització Controlador P + Planta 1	111
Fig. 138. Digitalització Controlador PD + Planta 1.....	112
Fig. 139. Digitalització Controlador I + Planta 1	112
Fig. 140. Digitalització Controlador PI + Planta 1	113
Fig. 141. Digitalització Controlador PID + Planta 1.....	113
Fig. 142. Digitalització Planta 2	114
Fig. 143. Digitalització Controlador P + Planta 2	114
Fig. 144. Digitalització Controlador PD + Planta 2.....	115
Fig. 145. Digitalització Controlador I + Planta 2	115
Fig. 146. Digitalització Controlador PI + Planta 2	116
Fig. 147. Digitalització Controlador PID + Planta 2.....	116
Fig. 148. Digitalització Planta 3	117
Fig. 149. Digitalització Controlador P + Planta 3	117
Fig. 150. Digitalització Controlador I + Planta 3	118
Fig. 151. Digitalització Controlador PI + Planta 3	118
Fig. 152. Digitalització Controlador PID + Planta 3.....	119
Fig. 153. Digitalització Planta 4	119
Fig. 154. Digitalització Controlador P + Planta 4	120
Fig. 155. Digitalització Controlador I + Planta 4	120
Fig. 156. Digitalització Controlador PI + Planta 4	121
Fig. 157. Digitalització Controlador PID + Planta 4.....	121
Fig. 158. Digitalització Planta 5	122
Fig. 159. Digitalització Controlador P + Planta 5	122
Fig. 160. Digitalització Controlador I + Planta 5	123
Fig. 161. Digitalització Controlador PI + Planta 5	123
Fig. 162. Espectre de la magnitud de $G(s)$ obtingut amb Matlab. Les asímptotes han estat afegides per assegurar que tots els alumnes escullen la mateixa freqüència de tall	124
Fig. 163. Planta implementada, amb una bobina de 100 mH, dues capacitàncies de 10 μF en paral·lel, impedància resultant de 20 μF ; i dues resistències de 10 Ω	125
Fig. 164. Gràfica creada amb Matlab a partir de les dades obtingudes a les simulacions del llaç obert realitzades en els entorns Faltad i Matlab	126
Fig. 165. Esquema realitzat amb el simulador del sistema en llaç tancat.....	127
Fig. 166. Gràfica creada amb Matlab a partir de les dades obtingudes a les simulacions del llaç tancat realitzades en els entorns Faltad i Matlab	127
Fig. 167. Les X negres representen els pols de les plantes, la X vermella el pol objectiu i la X blava del controlador. El O blau representa el zero de la planta i els O blaus els del controlador	128
Fig. 168. Model del controlador PID presentat per Katsuhiki Ogata en el seu llibre Ingenieria de Control Moderna.....	129
Fig. 169. Esquema realitzat amb el simulador del sistema controlat en llaç tancat.....	130
Fig. 170. Gràfica creada amb Matlab a partir de les dades obtingudes a les simulacions del sistema controlat en llaç tancat realitzades en els entorns Faltad i Matlab.....	130

Introducció

El projecte és divideix en tres fases diferents. Cadascuna de les quals és imprescindible per l'elaboració de la següent.

Fase I:

En la primera fase del projecte, es construeixen cinc plantes diferents amb combinacions de components R-L-C. Els components escollits suposaran una despesa mínima i un *stock* reduït.

Un cop obtingudes les plantes, es calcularan les funcions de transferència corresponents. Per visualitzar el comportament d'aquestes, es realitzaran simulacions en dos entorns diferents: l'entorn *Falstad*, on es realitzarà una simulació més pròxima al comportament real del sistema; i l'entorn *Matlab*, on es realitzarà una simulació ideal.

Finalment, s'analitzaran les característiques de la resposta transitòria i estacionària, necessàries per desenvolupament la següent fase del projecte.

Fase II:

En la segona fase del projecte, a partir de la informació obtinguda anteriorment, i de l'obtinguda en realitzar l'anàlisi d'estabilitat mitjançant els mètodes clàssics (marge de fase i de guany) i el marge de disc (*diskmargin*); amb l'ajuda de les eines proporcionades per *Matlab*, es millorarà el comportament transitori i estacionari de les plantes amb la introducció dels controladors P, I, PI, PD i PID. A l'hora d'implementar els controladors, seguirem el model presentat per *Katsuhiki Ogata en Ingeniería de Control Moderna*.

Un cop obtinguts els sistemes de control, per observar la diferència envers el sistema compensat i sense compensar, es realitzaran les simulacions pertinents en els dos entorns esmentats anteriorment.

Finalment, s'analitzaran tant les característiques transitòries i estacionàries com l'estabilitat dels sistemes compensats.

Fase III:

La tercera fase del projecte, amb motiu d'aplicació dels controladors en un microprocessador, *Arduino DUE*, es centrarà en digitalitzar els controladors en equacions en diferències. Com s'observarà, escollir un temps de mostreig adequat serà de gran importància; per aquest motiu, es presentarà el *Teorema de Shannon-Nyquist*.

Per comprovar les diferències en la resposta envers el règim continu i el discret, és realitzaran simulacions en l'entorn *Matlab*.

Fase IV:

La darrera fase del projecte, presenta el model de practica associada al projecte. Es detallen les preguntes i la seva solució.

1. Disseny de plantes amb combinacions de components RLC

La primera fase d'aquest treball de recerca es centra en el disseny de diferents circuits, plantes, amb combinacions de components *RLC*.

Per tal de dissenyar les diferents plantes, i com ben diu el títol del projecte, tant l'adquisició dels components com el seu encoblament en la placa han de ser econòmics.

Per una altra banda, el principal objectiu del treball és proporcionar material docent per a les pràctiques de Teoria Bàsica de Control; per tant, les plantes han de presentar característiques millorables pel que fa a la resposta respecte a un cert senyal d'entrada. S'ha escollit un senyal quadrat d'un Hertz de freqüència, amb un 50% de cicle de treball i una amplitud de 0.35 Volts.

Amb la finalitat de trobar cinc models de plantes diferents, s'han calculat diverses funcions de transferència. L'esquema general de les plantes és el següent:

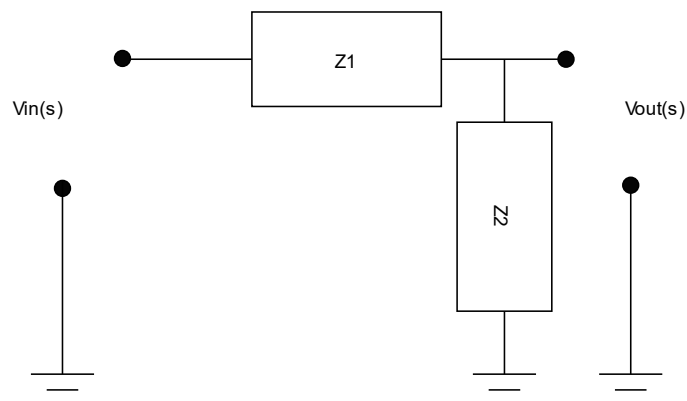


Fig. 1. Esquema general de la planta

La funció de transferència genèrica serà:

$$G(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

A partir d'aquesta equació, es crearan noves plantes modificant les impedàncies Z_1 i Z_2 . Per dissenyar-les, es tindrà en compte el model de *Laplace* dels *R-L-C*:

Element	Model temporal	Model Laplace
Resistència	$v(t) = R \cdot i(t)$	$V(s) = R \cdot I(s)$
Bobina	$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$	$V(s) = L \cdot s \cdot I(s)$
Condensador	$v(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt$	$V(s) = \frac{I(s)}{C \cdot s}$

Taula 1. Llei d'Ohm règim temporal i règim de Laplace components R-L-C

1.1. Primera planta

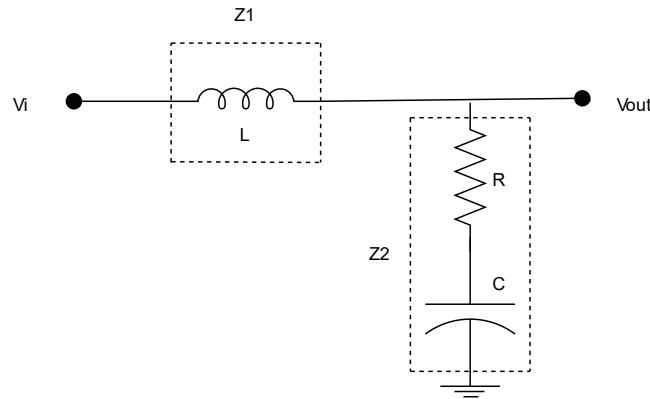


Fig. 2. Disseny Planta 1

Per realitzar el primer disseny, s'ha optat per escollir una bobina com impedància Z_1 i una resistència i un condensador en sèrie, com impedància Z_2 .

Si realitzem els càlculs matemàtics per trobar la funció de transferència de la planta $G_1(s)$ s'obté:

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{R + \frac{1}{C \cdot s}}{L \cdot s + R + \frac{1}{C \cdot s}} = \frac{s}{s} \cdot \frac{R + \frac{1}{C \cdot s}}{L \cdot s + R + \frac{1}{C \cdot s}} = \\ &= \frac{R \cdot s + \frac{1}{C}}{L \cdot s^2 + R \cdot s + \frac{1}{C}} = \frac{R[s + \frac{1}{C \cdot R}]}{L[s^2 + \frac{R}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C}]} = \frac{R}{L} \cdot \frac{(s + \frac{1}{C \cdot R})}{(s^2 + \frac{R}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C})} \end{aligned}$$

Per tant, es pot afirmar que:

$$G_1(s) = \frac{R}{L} \cdot \frac{(s + \frac{1}{C \cdot R})}{(s^2 + \frac{R}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C})} \cong K \cdot \frac{(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)} = K \cdot \frac{(s + z_1)}{(s^2 + s(p_1 + p_2) + (p_1 \cdot p_2))}$$

D'aquesta manera, és té una relació directa entre els valors dels components que formen la planta i la posició dels pols i zeros en llaç obert:

$$p_1 + p_2 = \frac{R}{L} \quad | \quad p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{L \cdot C}$$

En aquest punt, es comença l'etapa de modelatge, en la que depenent dels components que s'hagin escollit, la resposta del sistema variarà significativament. Per resoldre aquest "problema", s'ha creat un script en el programari *Matlab* que agilitzarà tot aquest procés.

En el script es fixaran unes constants i a partir d'aquestes es definiran les demés variables. Degut a que els components que han de formar les plantes han de ser reals i econòmics, hi ha certa complexitat a l'hora de dissenyar una planta que tingui com a pols valors enters, sempre que sigui possible, independentment de que siguin pols reals o complexos conjugats.

Com a criteri general, totes les plantes utilitzaran la mateixa bobina ($L = 100 \text{ mH}$), ja que després de fer una cerca detallada en la pàgina web de RS Components¹, s'ha conclòs que tant la bobina com el condensador són components amb uns valors molt específics. Per tant, alhora d'escollir la posició dels pols del sistema en llaç obert, serà prioritari fixar el valor d'aquests.

En aquest cas en concret, com a criteris de disseny, s'ha optat per la utilització d'un condensador de $10 \mu\text{F}$ i una resistència de 50Ω .

Amb aquests components s'obtenen pols complexos conjugats:

$$p = 250 \pm 968.245836j$$

$$G_1(s) = 500 \cdot \frac{(s + 2000)}{(s^2 + 500 \cdot s + 1000000)}$$

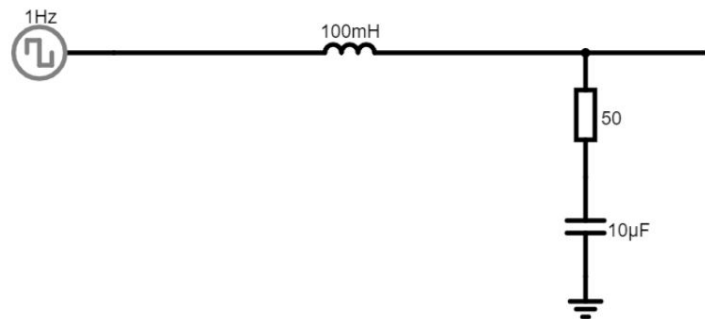


Fig. 3. Llaç obert Planta 1

Un cop determinada la planta, es procedeix a realitzar les simulacions pertinents tant en el *Matlab* com en el simulador *Falstad*². Per tancar el llaç en *Matlab* s'ha utilitzat la funció **feedback()**, proporcionada per *Control System Toolbox*. L'esquema equivalent de tancar el llaç analògicament és:

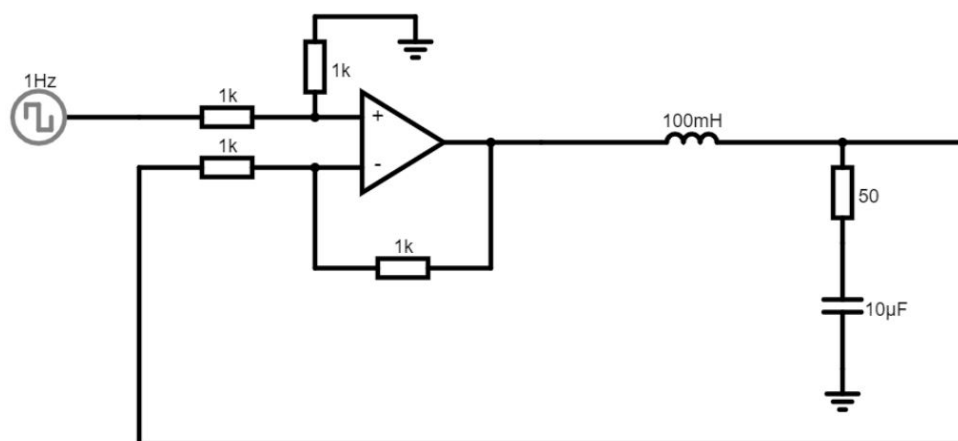


Fig. 4. Llaç tancat Planta 1

¹ <https://es.rs-online.com/web/>

² <http://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>

En l'entorn *Falstad* es realitzaran dues simulacions, la primera ajustant els paràmetres de l'amplificador operacional a un funcionament ideal ($V_{max} = 1\text{ kV}$; $V_{min} = -1\text{ kV}$; $Gain = 1\text{ M}$), tal com es realitza en l'entorn *Matlab*; i la segona ajustant els paràmetres de l'amplificador al seu funcionament real. L'amplificador operacional escollit és l' **UA741CDR** de *Texas Instruments*. En el *datasheet* del component es pot trobar la següent gràfica, on es representa el guany en funció de la freqüència:

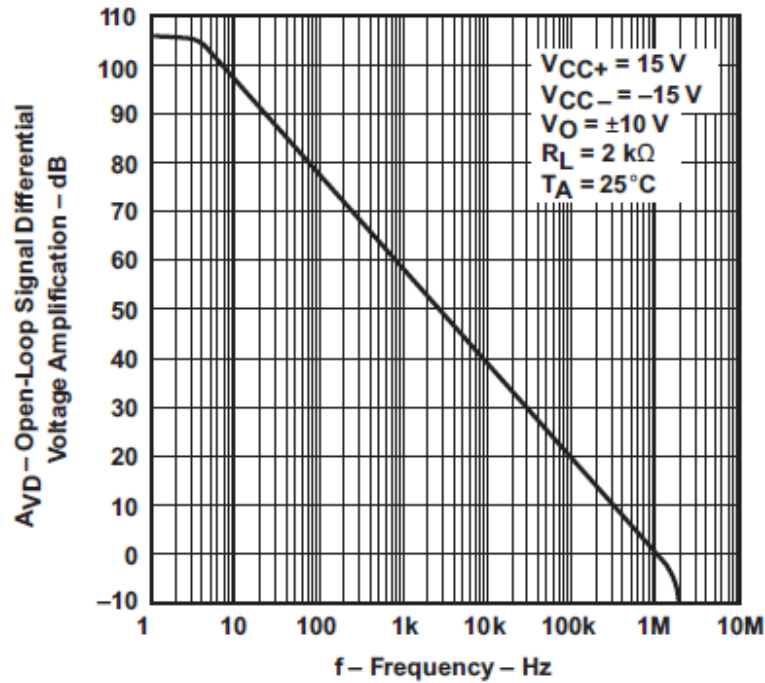


Fig. 5. Amplificació de la tensió diferencial del llaç obert en funció de la freqüència, UA741CDR (Texas Instruments).

En aquest cas, com s'ha esmentat anteriorment, la tensió d'alimentació escollida ha estat una senyal quadrada d'un Hertz de freqüència, amb un 50% de cicle de treball i amb una amplitud de 0.35 Volts.

Consultant la Fig.5, el guany corresponent a una freqüència d'un Hertz és d'aproximadament 106.02 dB. Per passar-ho a escala decimal s'haurà de revertir la següent equació:

$$K(dB) = 20 \cdot \log(K)$$

Per tant, un guany de 106.02 dB equival a un guany d'aproximadament 200K en escala decimal, el que significa un funcionament pràcticament ideal. Durant la fase experimental, la màxima freqüència a la que s'arribarà serà 100 Hz, amb el que obtindrem un guany de 10K.

Per comparar la diferència envers les simulacions dels dos entorns anteriorment esmentats, s'ha afegit al script codi per poder representar les dades d'ambdós. S'utilitzarà la funció **rlocus()**, proporcionada per *Control System Toolbox*, per dibuixar el lloc de les arrels. També s'ha afegit la funció **stepinfo()** que facilitarà informació de la resposta transitòria de la planta en llaç tancat respecte a una entrada esglaó.

Tota aquesta informació és necessària per a la següent fase, disseny d'especificacions temporals de la resposta transitòria del sistema en llaç tancat per a una entrada esglaó. El principal objectiu d'aquestes especificacions serà optimitzar la resposta del sistema; per exemple, reduint el temps d'assentament (t_s) o reduint la sobre elongació de la resposta (M_p).

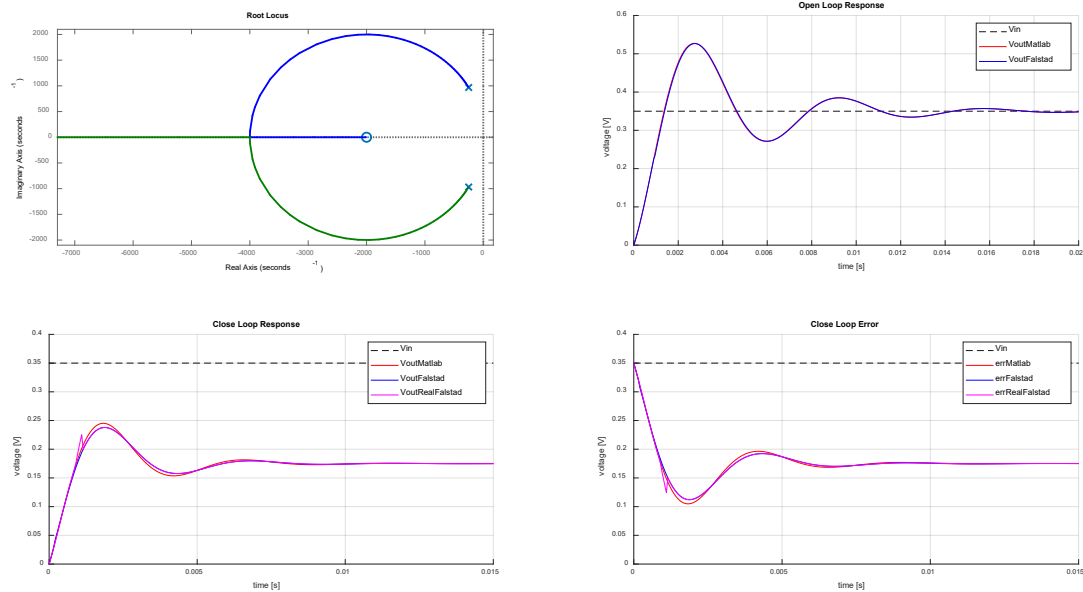


Fig. 6. Matlab vs Falstad Planta 1

En aquest disseny, amb l'elecció dels components $R = 50 \Omega$ i $C = 10 \mu F$, s'ha obtingut una resposta transitòria oscil·latòria, sistema subesmorteït ($0 < \xi < 1$; $\xi = 0.35355$). Com es pot observar les simulacions realitzades per *Matlab* i *Falstad* són pràcticament idèntiques.

En les dues gràfiques inferiors s'han representat les simulacions dels senyals de sortida pels entorns *Matlab* i *Falstad*. En el cas d'aquest últim, s'ha representat les dues simulacions esmentades anteriorment: la "*VoutFalstad*", simulació amb l'amplificador operacional amb paràmetres ideals; i la "*VoutRealFalstad*", simulació amb l'amplificador operacional amb paràmetres reals de funcionament.

Tenint en compte que el sistema és de segon ordre i de tipus 0, presenta un error en estat estacionari per a una entrada esglaó, que es pot calcular visualment o mitjançant equacions. En aquest cas, pel fet que l'entrada no és unitària, per calcular l'error en estat estacionari s'haurà de multiplicar el valor obtingut per l'amplitud del senyal d'entrada:

$$e_{ss} = \frac{V_{in}}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{V_{in}}{1 + K_p} = \frac{V_{in}}{1 + 1} = 0.5 \cdot V_{in} = 0.5 \cdot 0.35V = 0.175 V$$

Utilitzant la comanda **stepinfo()**, proporcionada per *Matlab*, s'obté la següent informació sobre la resposta a una entrada esglaó del sistema enllaç tancat:

Temps d'assentament (t_s)[s]	Sobre elongació (M_p)[%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p)[s]
0.0074	40.0747	0.24513	0.0018

Taula 2. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Planta 1 (Matlab)

Comparant els resultats del laç tancat de la primera planta dels entorns *Matlab* i *Falstad* (amplificador operacional alimentat amb $\pm 12V$) amb s'obté:

Entorn	Temps d'assentament (t_s)[s]	Sobre elongació (M_p)[%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p)[s]
Matlab	0.0074	40.0747	0.24513	0.0018
Falstad	0.0074	36	0.238	0.0019

Taula 3. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Matlab vs Falstad Planta 1

1.2. Segona planta

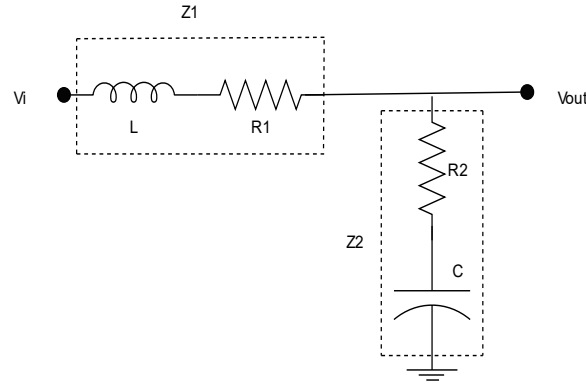


Fig. 7. Disseny Planta 2

Per realitzar el segon disseny, s'ha optat per incloure en la impedància Z_1 una resistència. Per tant, es té la impedància Z_1 , formada per una bobina i una resistència en sèrie, i la impedància Z_2 , formada per una resistència i un condensador en sèrie.

Realitzant els càlculs matemàtics per obtenir la funció de transferència s'obté:

$$\begin{aligned}
 G_2(s) &= \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{C \cdot s}}{L \cdot s + R_1 + R_2 + \frac{1}{C \cdot s}} = \\
 &= \frac{s}{s} \cdot \frac{R_2 + \frac{1}{C \cdot s}}{L \cdot s + R_1 + R_2 + \frac{1}{C \cdot s}} = \frac{R_2 \cdot s + \frac{1}{C}}{L \cdot s^2 + (R_1 + R_2) \cdot s + \frac{1}{C}} = \frac{R_2 \left[s + \frac{1}{C \cdot R_2} \right]}{L \left[s^2 + \frac{(R_1 + R_2)}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right]} \\
 G_2(s) &= \frac{R_2}{L} \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{C \cdot R_2} \right)}{\left(s^2 + \frac{(R_1 + R_2)}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right)}
 \end{aligned}$$

Per tant, es pot afirmar que:

$$\begin{aligned}
 G_2(s) &= \frac{R_2}{L} \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{C \cdot R_2} \right)}{\left(s^2 + \frac{(R_1 + R_2)}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right)} \cong K \cdot \frac{(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)} = \\
 &= K \cdot \frac{(s + z_1)}{(s^2 + (p_1 + p_2) \cdot s + (p_1 \cdot p_2))}
 \end{aligned}$$

D'aquesta manera, es té una relació directa entre els valors dels components que formen la planta i la posició dels pols i zeros en llaç obert:

$$p_1 + p_2 = \frac{(R_1 + R_2)}{L} \quad | \quad p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{L \cdot C}$$

De la mateixa manera que s'ha realitzat en l'anterior disseny, un cop trobades les relacions directes entre els components i els pols de la funció de transferència del sistema, amb l'ajuda del *script* anteriorment esmentat, es procedeix a la fase de modelatge.

Com en tots els dissenys, s'ha partit de la premissa de l'ús d'una bobina de 100 mH . En aquest cas, com es pot observar tenim 5 incògnites: p_1, p_2, R_1, R_2 i C ; pel que a criteri del dissenyador s'ha suposat:

$$R = R_1 = R_2$$

D'aquesta manera:

$$p_1 + p_2 = \frac{2 \cdot R}{L} \quad | \quad p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{L \cdot C}$$

Com s'ha esmentat anteriorment, és prioritari fixar el valor del condensador. Després d'introduir diverses combinacions de pols en el *script*, s'ha observat que pels pols imaginaris conjugats $p_1 = -100 \pm 700j$ s'obté:

$$R = R_1 = R_2 = 10\ \Omega \quad | \quad C = 20\ \mu\text{F}$$

Per tal d'obtenir un condensador de $20\ \mu\text{F}$, hem col·locat en paral·lel dos condensadors de $10\ \mu\text{F}$, optativa més econòmica. Per tant:

$$G_2(s) = 100 \cdot \frac{(s + 5000)}{(s^2 + 200 \cdot s + 500000)}$$

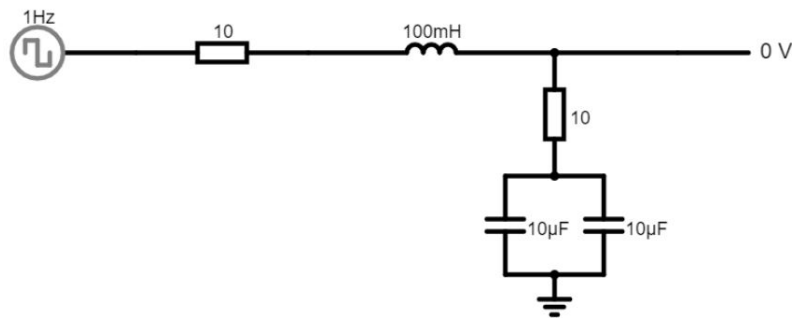


Fig. 8. Llaç obert Planta 2

Un cop determinada la planta, es procedeix a realitzar les simulacions pertinents tant en *Matlab* com en *Falstad*. L'esquema equivalent de tancar el llaç analògicament és:

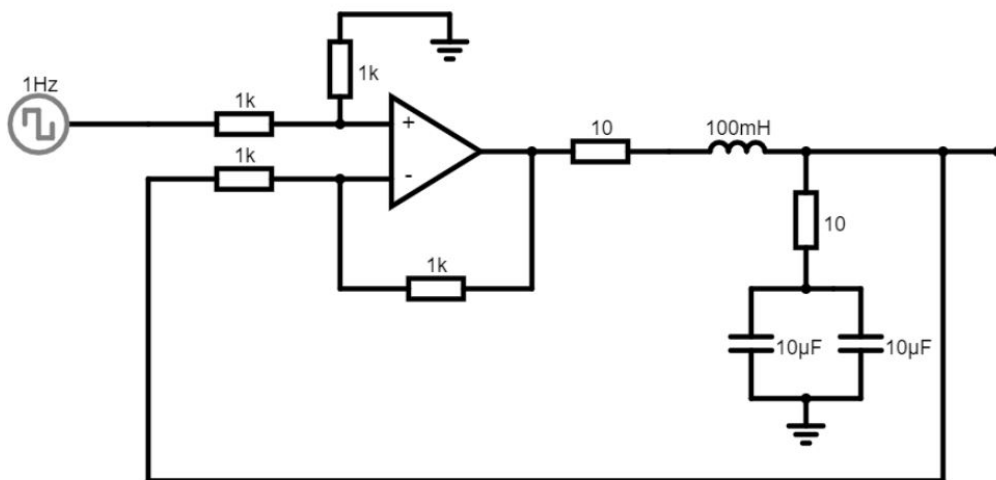


Fig. 9. Llaç tancat Planta 2

Un cop realitzades les simulacions en els dos entorns. S'han obtingut les següents gràfiques:

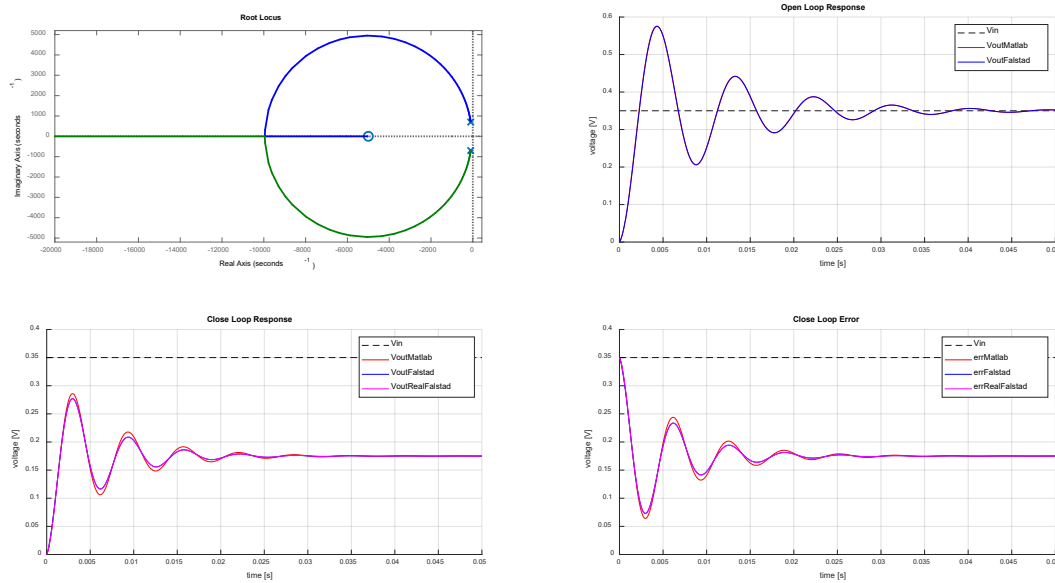


Fig. 10. Matlab vs Falstad Planta 2

En aquest segon disseny, amb l'elecció dels pols $p = -100 \pm 700j$ s'ha obtingut una resposta transitòria oscil·latòria, sistema subesmorteït ($0 < \xi < 1$; $\xi = 0.15$). Com en el cas anterior, les simulacions de *Matlab* i *Falstad* són pràcticament idèntiques.

És interessant introduir un sistema amb aquestes característiques a l'alumnat, ja que aquest presenta una resposta oscil·latòria, poc estable, amb sobre pics elevats. Per aquest motiu, serà fàcil observar la necessitat d'introduir controladors per millorar aquestes característiques poc desitjables.

Tenint en compte que el sistema és de segon ordre i de tipus 0, presenta un error en estat estacionari per a una entrada esglaó, que es pot calcular visualment o mitjançant equacions. En aquest cas, ja que l'entrada no és unitària, per calcular l'error en estat estacionari s'haurà de multiplicar el valor obtingut per l'amplitud del senyal d'entrada:

$$e_{ss} = \frac{V_{in}}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{V_{in}}{1 + K_p} = \frac{V_{in}}{1 + 1} = 0.5 \cdot V_{in} = 0.5 \cdot 0.35V = 0.175V$$

Executant la comanda **stepinfo()** en l'entorn *Matlab* s'obté la següent informació de la planta en llaç tancat:

Temps d'assentament (t_s)[s]	Sobre elongació (M_p)[%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p)[s]
0.0257	63.0784	0.285387	0.0031

Taula 4. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Planta 2 (Matlab)

Comparant els resultats del llaç tancat de la segona planta dels entorns *Matlab* i *Falstad* (amplificador operacional alimentat amb $\pm 12V$) s'obté:

Entorn	Temps d'assentament (t_s)[s]	Sobre elongació (M_p)[%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p)[s]
Matlab	0.0257	63.0784	0.285387	0.0031
Falstad	0.0257	58	0.277	0.00295

Taula 5. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Matlab vs Falstad Planta 2

1.3. Tercera planta

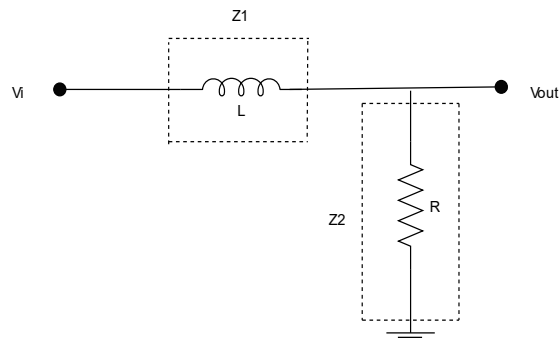


Fig. 11. Disseny Planta 3

Per realitzar el tercer disseny s'ha reduït el nom de components. Es té la impedància Z_1 , formada per una bobina, i la impedància Z_2 , formada per una resistència.

Realitzant els càlculs matemàtics per obtenir la funció de transferència s'obté:

$$G_3(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{R}{L \cdot s + R} = \frac{\frac{R}{L}}{s + \frac{R}{L}}$$

Per tant, es pot afirmar que:

$$G_3(s) = \frac{\frac{R}{L}}{s + \frac{R}{L}} \cong \frac{K}{s + p_1}$$

D'aquesta manera, és té una relació directa entre els valors dels components que formen la planta i la posició del pol en llaç obert:

$$p_1 = \frac{R}{L}$$

De la mateixa manera que s'ha realitzat en els dissenys anteriors, però amb més facilitat, partint del valor general de la bobina, 100 mH , sol es té dues incògnites: R i p_1 . El criteri de disseny ha estat, en aquest cas, escollir una resistència que ofereixi un correcte funcionament del sistema. D'aquesta manera s'ha escollit:

$$R = p_1 \cdot L = 100 \, \Omega$$

$$G_3(s) = \frac{1000}{s + 1000}$$

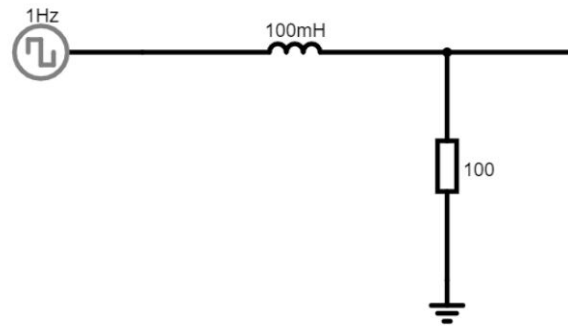


Fig. 12. Llaç obert Planta 3

Un cop determinada la planta, es procedeix a realitzar les simulacions pertinents tant en *Matlab* com en *Falstad*. L'esquema equivalent de tancar el llaç analògicament és:

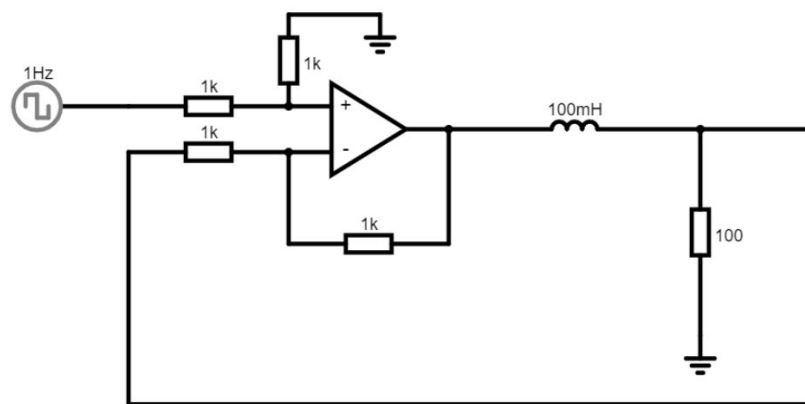


Fig. 13. Llaç tancat Planta 3

Un cop realitzades les simulacions en els dos entorns. S'han obtingut les següents gràfiques:

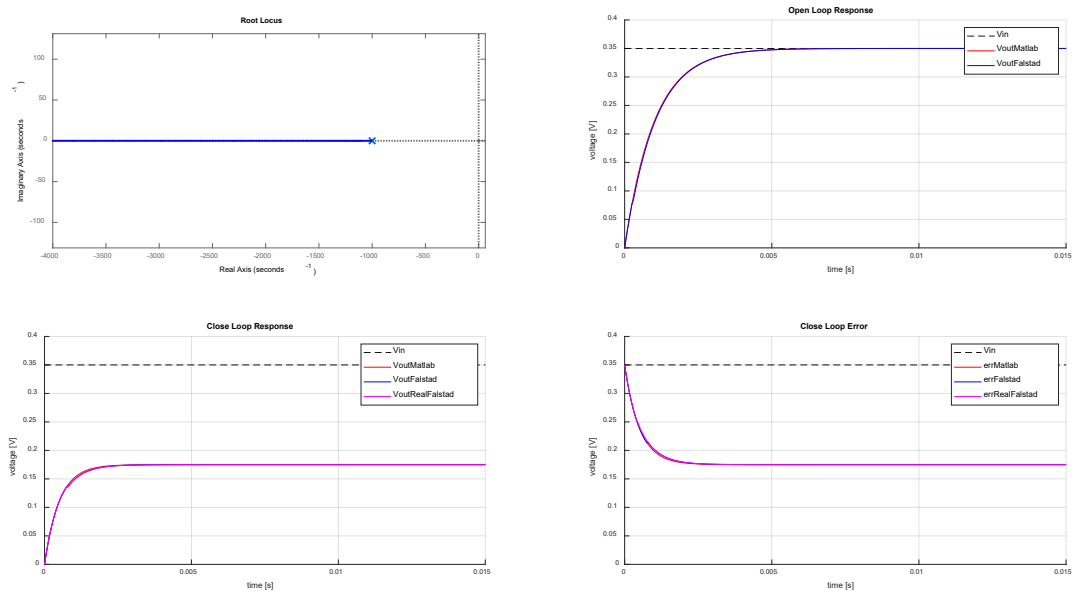


Fig. 14. Matlab vs Falstad Planta 3

A diferència dels dos dissenys anteriors, la tercera planta presenta una resposta més ràpida, com es pot observar en les gràfiques de la Fig.14.

Tenint en compte que el sistema és de primer ordre i de tipus 0, presenta un error en estat estacionari per a una entrada esglaó, que es pot calcular visualment o mitjançant equacions. En aquest cas, pel fet que l'entrada no és unitària, per calcular l'error en estat estacionari s'haurà de multiplicar el valor obtingut per l'amplitud del senyal d'entrada:

$$e_{ss} = \frac{V_{in}}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{V_{in}}{1 + K_p} = \frac{V_{in}}{1 + 1} = 0.5 \cdot V_{in} = 0.5 \cdot 0.35V = 0.175V$$

Executant la comanda **stepinfo()** en l'entorn *Matlab* obtenim la següent informació de la nostra planta en llaç tancat:

Temps d'assentament (t_s)[s]	Sobre elongació (M_p)[%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p)[s]
0.002	0	0	0

Taula 6. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Planta 3 (Matlab)

Comparant els resultats del llaç tancat de la segona planta dels entorns *Matlab* i *Falstad* (amplificador operacional alimentat amb $\pm 12V$) s'obté:

Entorn	Temps d'assentament (t_s)[s]	Sobre elongació (M_p)[%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p)[s]
Matlab	0.002	0	0	0
Falstad	0.002	0	0	0

Taula 7. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Matlab vs Falstad Planta 3

1.4. Quarta planta

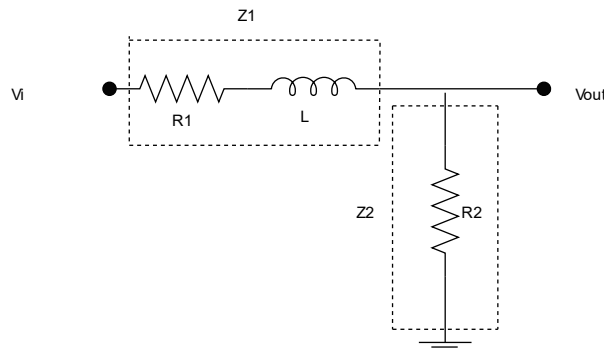


Fig. 15. Disseny Planta 4

Per realitzar el quart disseny, s'ha afegit una resistència a la impedància Z_1 . Es té la impedància Z_1 , formada per una resistència i una bobina, i la impedància Z_2 , formada per una resistència.

Realitzant els càlculs matemàtics per obtenir la funció de transferència s'obté:

$$G_4(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{R_2}{L \cdot s + R_1 + R_2} = \frac{\frac{R_2}{L}}{s + \frac{(R_2 + R_1)}{L}}$$

Per tant, es pot afirmar que:

$$G_4(s) = \frac{\frac{R_2}{L}}{s + \frac{(R_2 + R_1)}{L}} \cong \frac{K}{s + p_1}$$

D'aquesta manera, és té una relació directa entre els valors dels components que formen la planta i la posició del pol en llaç obert:

$$p_1 = \frac{R_2 + R_1}{L}$$

De la mateixa manera que s'ha realitzat en els dissenys anteriors, però amb més facilitat, partint del valor general de la bobina, 100 mH, es té tres incògnites: R_1 , R_2 i p_1 . El criteri de disseny ha estat, en aquest cas, escollir una resistència que assegurí el correcte funcionament i determinar que totes dues resistències tenen el mateix valor. D'aquesta manera s'obté:

$$R = R_1 = R_2 = \frac{p_1 \cdot L}{2} = 50 \, \Omega$$

$$G_4(s) = \frac{500}{s + 1000}$$

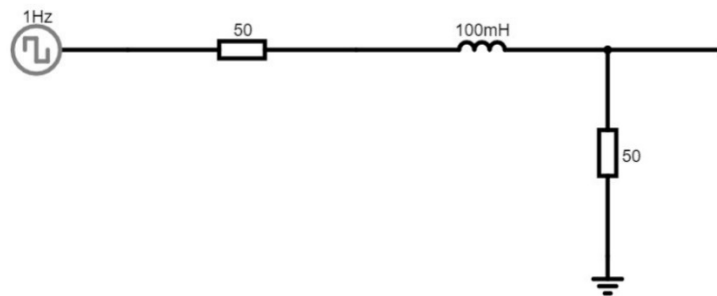


Fig. 16. Llaç obert Planta 4

Un cop determinada la planta, es procedeix a realitzar les simulacions pertinents tant en *Matlab* com en *Falstad*. L'esquema equivalent de tancar el llaç analògicament és:

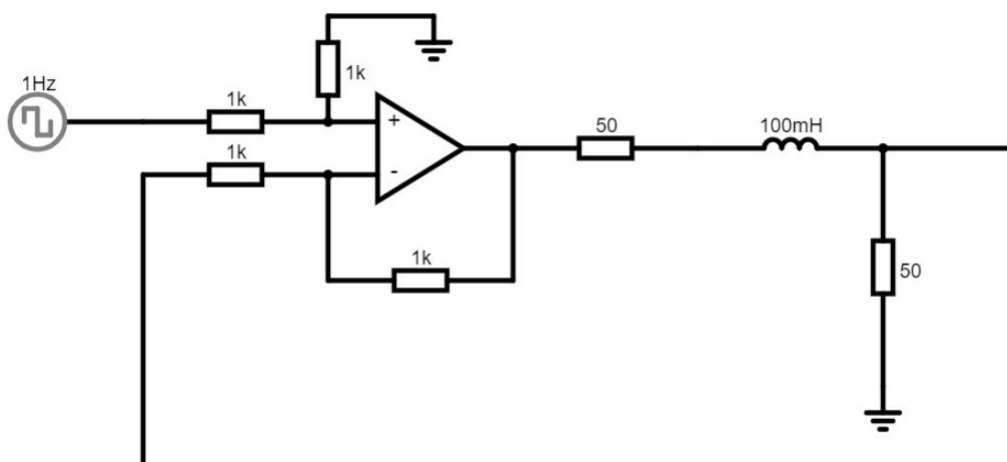


Fig. 17. Llaç tancat Planta 4

Un cop realitzades les simulacions en els dos entorns. S'han obtingut les següents gràfiques:

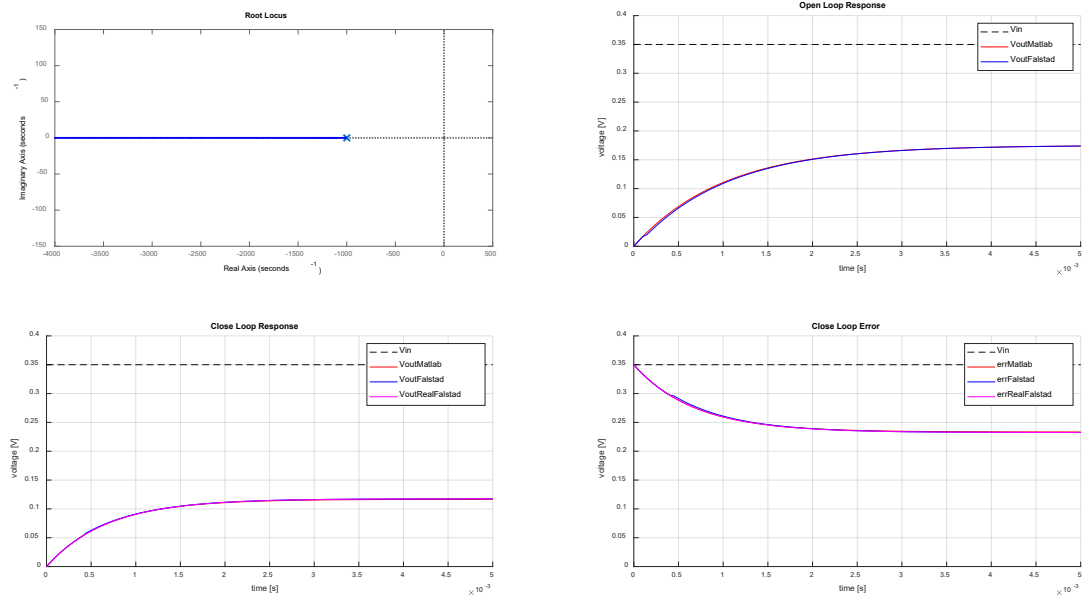


Fig. 18. Matlab vs Falstad Planta 4

Tenint en compte que el sistema és de primer ordre i de tipus 0, presenta un error en estat estacionari per a una entrada esglaó, que es pot calcular visualment o mitjançant equacions. Al afegir-li la resistència en sèrie en Z_1 s'ha augmentat l'error en estat estacionari. En aquest cas, pel fet que l'entrada no és unitària, per calcular l'error en estat estacionari, s'haurà de multiplicar el valor obtingut per l'amplitud del senyal d'entrada:

$$e_{ss} = \frac{V_{in}}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{V_{in}}{1 + K_p} = \frac{V_{in}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot V_{in} = \frac{2}{3} \cdot 0.35V = 0.233V$$

Executant la comanda **stepinfo()** en l'entorn *Matlab* obtenim la següent informació de la planta en llaç tancat:

Temps d'assentament (t_s)[s]	Sobre elongació (M_p)[%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p)[s]
0.0026	0	0	0

Taula 8. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Planta 4 (Matlab)

Comparant els resultats del llaç tancat de la segona planta dels entorns *Matlab* i *Falstad* (amplificador operacional alimentat amb $\pm 12V$) s'obté:

Entorn	Temps d'assentament (t_s)[s]	Sobre elongació (M_p)[%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p)[s]
Matlab	0.0026	0	0	0
Falstad	0.0025	0	0	0

Taula 9. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Matlab vs Falstad Planta 4

1.5. Cinquena planta

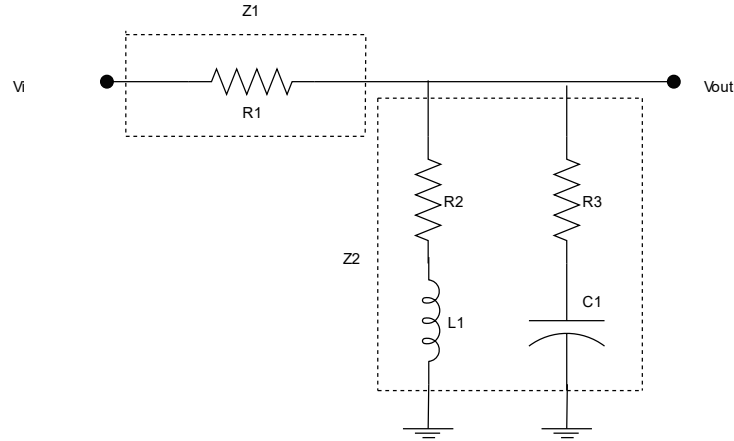


Fig. 19. Disseny Planta 5

En aquest darrer disseny, s'ha optat per augmentar la complexitat del sistema.

La impedància Z_1 està formada per una resistència, mentre que la impedància Z_2 , està formada per dues branques en paral·lel. En la primera d'aquestes estan en sèrie una resistència i una bobina. En la segona es troben en sèrie una resistència i un condensador.

El procediment variarà breument. Primer es calcularà el valor de la impedància Z_2 , i posteriorment es procedirà a calcular la funció de transferència de la planta.

Per simplificar el càlcul de les impedàncies i de la funció de transferència, a criteri d'optimitzar el disseny, s'ha suposat que $R = R_1 = R_2 = R_3$. Per tant:

$$\begin{aligned}
 Z_2(s) &= \left(\frac{1}{R + L \cdot s} + \frac{1}{R + \frac{1}{C \cdot s}} \right)^{-1} = \left(\frac{R + L \cdot s + R + \frac{1}{C \cdot s}}{(R + L \cdot s) \cdot \left(R + \frac{1}{C \cdot s} \right)} \right)^{-1} = \\
 &= \left(\frac{\frac{2 \cdot R \cdot C \cdot s + L \cdot C \cdot s^2 + 1}{C \cdot s}}{\frac{R^2 \cdot C \cdot s + R + R \cdot L \cdot C \cdot s^2 + L \cdot s}{C \cdot s}} \right)^{-1} = \left(\frac{L \cdot C \cdot s^2 + 2 \cdot R \cdot C \cdot s + 1}{R \cdot L \cdot C \cdot s^2 + (R^2 \cdot C + L) \cdot s + R} \right)^{-1} = \\
 &= \frac{R \cdot L \cdot C \cdot s^2 + (R^2 \cdot C + L) \cdot s + R}{L \cdot C \cdot s^2 + 2 \cdot R \cdot C \cdot s + 1} = \frac{R \cdot L \cdot C \cdot \left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right]}{L \cdot C \cdot \left[s^2 + \frac{2 \cdot R}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right]} = \\
 Z_2(s) &= \frac{R \cdot \left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right]}{\left[s^2 + \frac{2 \cdot R}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right]}
 \end{aligned}$$

Un cop calculada $Z_2(s)$, es procedeix a calcular la funció de transferència de la planta:

$$\begin{aligned}
 G_5(s) &= \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{\frac{R \cdot \left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right]}{\left[s^2 + \frac{2 \cdot R}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right]}}{R + \frac{R \cdot \left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right]}{\left[s^2 + \frac{2 \cdot R}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right]}} = \\
 &= \frac{R \cdot \left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right]}{R \cdot \left[s^2 + \frac{2 \cdot R}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right] + R \cdot \left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right]} = \\
 &= \frac{R \cdot \left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right]}{2 \cdot R \cdot s^2 + s \cdot \left(\frac{3 \cdot R^2}{L} + \frac{1}{C} \right) + \frac{2 \cdot R}{L \cdot C}} = \frac{R \cdot \left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right]}{2 \cdot R \cdot s^2 + s \cdot \left(\frac{3 \cdot R^2 \cdot C + L}{L \cdot C} \right) + \frac{2 \cdot R}{L \cdot C}} = \\
 &= \frac{R \cdot \left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right]}{2 \cdot R \cdot \left[s^2 + s \cdot \left(\frac{3 \cdot R^2 \cdot C + L}{2 \cdot R \cdot L \cdot C} \right) + \frac{1}{L \cdot C} \right]} = \frac{\left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right]}{2 \cdot \left[s^2 + s \cdot \left(\frac{3 \cdot R^2 \cdot C + L}{2 \cdot R \cdot L \cdot C} \right) + \frac{1}{L \cdot C} \right]}
 \end{aligned}$$

Per tant, es pot afirmar que:

$$\begin{aligned}
 G_5(s) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right]}{\left[s^2 + s \cdot \left(\frac{3 \cdot R^2 \cdot C + L}{2 \cdot R \cdot L \cdot C} \right) + \frac{1}{L \cdot C} \right]} \cong K \cdot \frac{(s + z_1) \cdot (s + z_2)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2)} = \\
 &= K \cdot \frac{(s + z_1) \cdot (s + z_2)}{s^2 + s(p_1 + p_2) + (p_1 \cdot p_2)}
 \end{aligned}$$

D'aquesta manera, es té la relació directa entre els valors dels components que formen la planta i la posició del pol en llaç obert:

$$(p_1 + p_2) = \left(\frac{3 \cdot R^2 \cdot C + L}{2 \cdot R \cdot L \cdot C} \right) \quad | \quad (p_1 \cdot p_2) = \frac{1}{L \cdot C}$$

De la mateixa manera que s'ha realitzat en els anteriors dissenys, un cop trobades les relacions directes entre els components i els pols de la funció de transferència del sistema, amb l'ajuda del *script* anteriorment esmentat, es procedeix a la fase de modelatge.

Com en tots els dissenys, s'ha partit de la premissa de l'ús d'una bobina de 100 mH. En aquest cas, com es pot observar tenim 4 incògnites: p_1, p_2, R i C ; ja que com s'ha definit abans de calcular la impedància Z_2 , s'ha suposat que:

$$R = R_1 = R_2 = R_3$$

Com s'ha esmentat anteriorment, és prioritari fixar el valor del condensador i assegurar un correcte funcionament del sistema. Després d'introduir varies combinacions de pols en el *script* s'ha determinat que per a uns pols reals, $p_1 = 100$ i $p_2 = 5000$, s'obté:

$$C = 20 \mu F; \quad R = R_1 = R_2 = R_3 = 335.025 \Omega \text{ i } 4.9747475 \Omega$$

La resistència té dos valors perquè s'obté a partir de resoldre una equació de segon grau. Com s'ha esmentat en tots els dissenys, s'ha de dissenyar el circuit amb components que assegurin el correcte funcionament. Per tant, s'ha escollit la resistència de 335.025Ω , arrodonint 335Ω .

D'aquesta manera obtenim la planta:

$$G_5(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(s + 149.25373) \cdot (s + 3350)}{(s + 100) \cdot (s + 5000)}$$

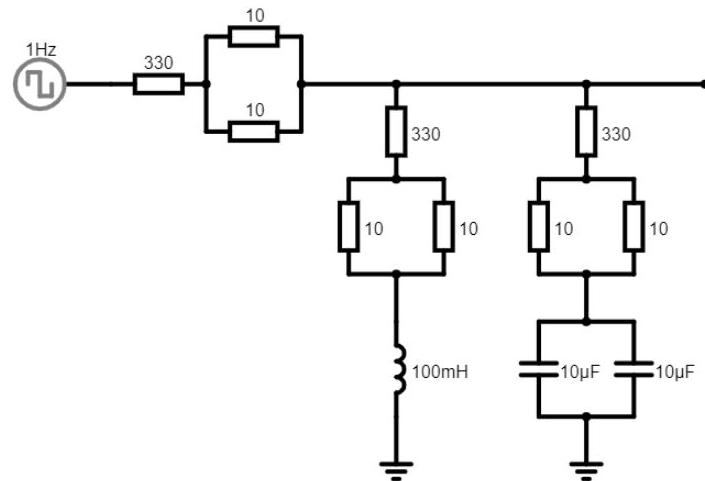


Fig. 20. Llaç obert Planta 5

Un cop determinada la planta, es procedeix a realitzar les simulacions pertinents tant en *Matlab* com en *Falstad*. L'esquema equivalent de tancar el llaç analògicament és:

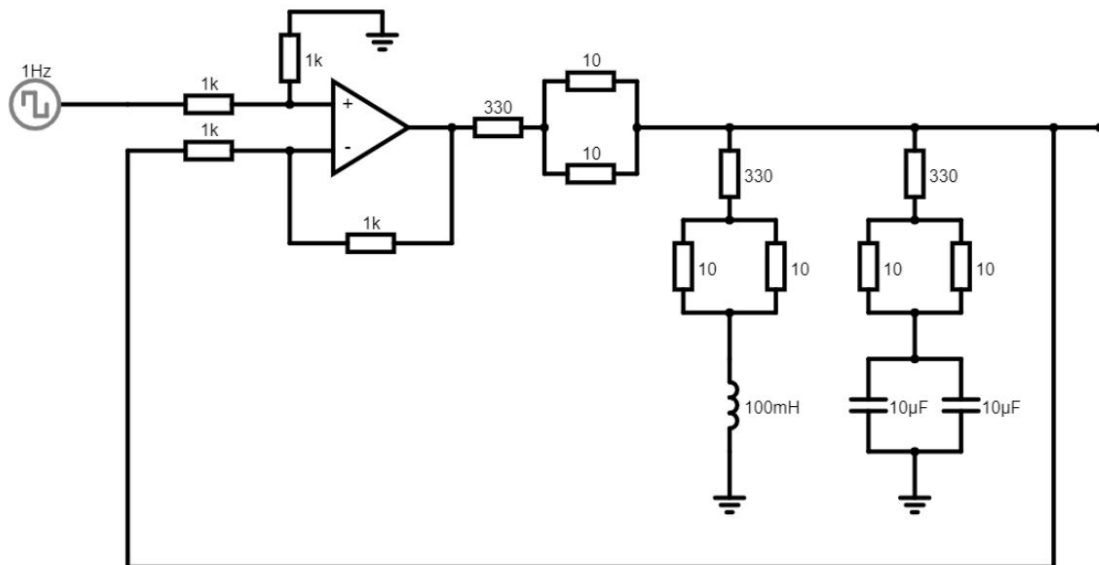


Fig. 21. Llaç tancat Planta 5

Un cop realitzades les simulacions en els dos entorns. S'han obtingut les següents gràfiques:

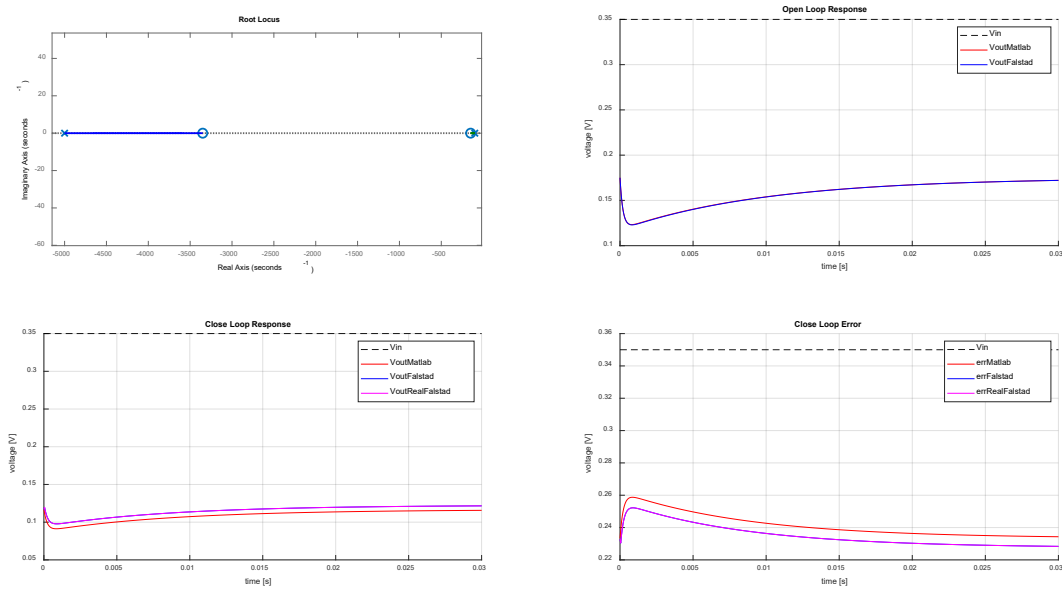


Fig. 22. Matlab vs Falstad Planta 5

En aquest cas la planta és un sistema de segon ordre *tipus 0*, amb l'elecció dels pols $p_1 = 100$ i $p_2 = 5000$ s'ha obtingut una resposta transitòria no oscil·latòria, sistema sobre esmorteït ($\xi > 1$, $\xi = 3.9547$).

Com es pot observar, hi ha una petita diferència entre les simulacions realitzades en l'entorn *Falstad* i el *Matlab*. Les simulacions de *Falstad* presenten menys error que la simulació de *Matlab*.

Tenint en compte que el sistema és de segon ordre i de *tipus 0*, presenta un error en estat estacionari per a una entrada esglaó, que es pot calcular visualment o mitjançant equacions. En aquest cas, pel fet que l'entrada no és unitària, per calcular l'error en estat estacionari s'haurà de multiplicar el valor obtingut per l'amplitud del senyal d'entrada:

$$e_{ss} = \frac{V_{in}}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{V_{in}}{1 + K_p} = \frac{V_{in}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot V_{in} = \frac{2}{3} \cdot 0.35V = 0.233V$$

Executant la comanda **stepinfo()** en l'entorn *Matlab* obtenim la següent informació de la planta en llaç tancat:

Temps d'assentament (t_s)[s]	Sobre elongació (M_p)[%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p)[s]
0.0359	0	0	0

Taula 10. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Planta 5 (Matlab)

Comparant els resultats del llaç tancat de la segona planta dels entorns *Matlab* i *Falstad* (amplificador operacional alimentat amb $\pm 12V$) s'obté:

Entorn	Temps d'assentament (t_s)[s]	Sobre elongació (M_p)[%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p)[s]
Matlab	0.0359	0	0	0
Falstad	0.035	0	0	0

Taula 11. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35V, Matlab vs Falstad Planta 5

2. Disseny resposta transitòria i estacionària

Un cop finalitzada la primera fase, disseny de plantes amb combinacions de components RLC, ens centrarem a millorar la seva resposta.

La resposta en temps d'un sistema de control consta de dues parts:

- La **resposta transitòria**. Indica com es comporta la sortida del sistema des de l'estat inicial fins a l'estat final.
- La **resposta en estat estable o estacionària**. Indica com es comporta la sortida del sistema d'acord t tendeix a l'infinit.

En l'anàlitzar un sistema de control, haurem d'examinar el comportament de la resposta transitòria i estacionària. Si la resposta en estat estacionari no coincideix exactament amb l'entrada, es diu que el sistema té un *error en estat estacionari* (e_{ss}). Aquest error indica la precisió del sistema.

En aquest cas, s'ha dissenyat cinc plantes diferents. Dues d'elles de primer ordre i les altres tres de segon ordre. La resposta d'aquestes respecte a una entrada esglaió variarà, per aquest motiu, l'anàlisi efectuat dependrà directament de les característiques pròpies de cada sistema.

2.1. Sistemes de primer ordre

Partint d'un esquema de primer ordre genèric, la relació entrada-sortida és:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{T \cdot s + 1}, \quad \text{on } T \geq 0 \text{ és la constant de temps}$$

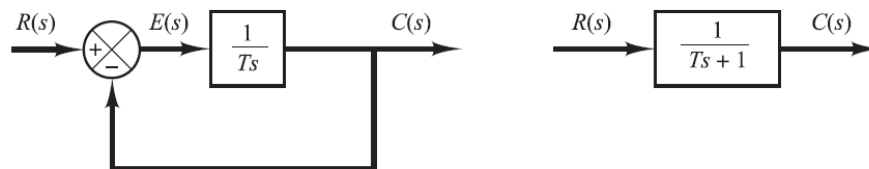


Fig. 23. Sistema de primer ordre

2.1.1. Resposta esglaió unitari

Donat que la transformada de *Laplace* de la funció esglaió unitari és $1/s$, substituint $R(s) = 1/s$ en la funció de transferència, s'obté:

$$C(s) = \frac{1}{T \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

Expandint $C(s)$ en fraccions simples:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{T \cdot s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/T)}$$

Realitzant la transformada inversa de *Laplace*, s'obté:

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \quad \text{per } t \geq 0$$

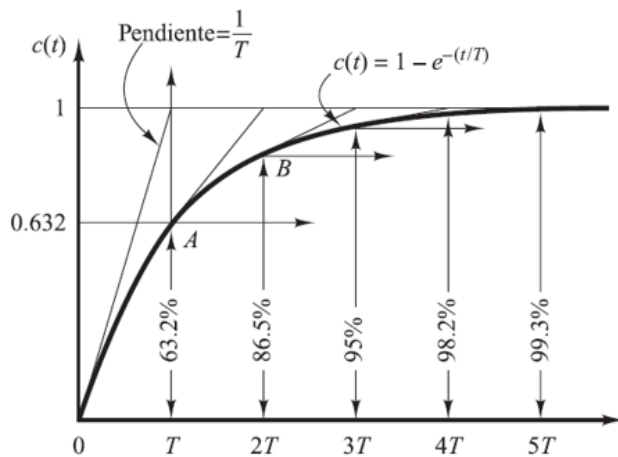


Fig. 24. Corba de resposta esglaó unitari sistema de primer de ordre

Observant la Fig. 24 es pot concloure els següents aspectes:

- Conforme T disminueix, més ràpida es la resposta del sistema (el pol s'allunya de l'origen).
- Matemàticament, l'estat estacionari s'obté per a $t = \infty$.
- En la pràctica, l'estat estacionari, s'obté en:
 - **2%** del valor final, quatre constants de temps ($4T$).
 - **5%** del valor final, tres constants de temps ($3T$).

2.1.2. Resposta rampa unitària

Donat que la transformada de Laplace de la funció rampa unitària és $1/s^2$, s'obté la sortida del sistema com:

$$C(s) = \frac{1}{T \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{s^2}$$

Si s'expressa en fraccions parcials, s'obté:

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{T \cdot s + 1}$$

Realitzant la transformada inversa de Laplace:

$$c(t) = t - T + T e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0$$

D'aquesta manera, la senyal d'error $e(t)$ és:

$$e(t) = r(t) - c(t) = T (1 - e^{-t/T})$$

Per tant, quan t tendeix a infinit :

$$e(\infty) = T$$

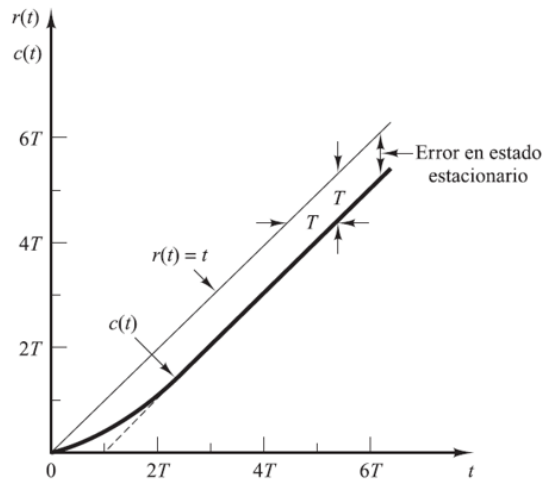


Fig. 25. Resposta rampa unitària sistema primer ordre

Observant la Fig.25 es pot afirmar:

- L'error és igual a T per un t suficientment gran.
- Contra més petita és T , menor és l'error en estat estacionari (e_{ss}).

2.1.3. Resposta impuls unitari

Per a l'entrada impuls unitari, $R(s) = 1$, s'obté la sortida del sistema com:

$$C(s) = \frac{1}{T \cdot s + 1}$$

Realitzant la transformada inversa de Laplace s'obté:

$$c(t) = \frac{1}{T} \cdot e^{-t/T}, \quad \text{per } t \geq 0$$

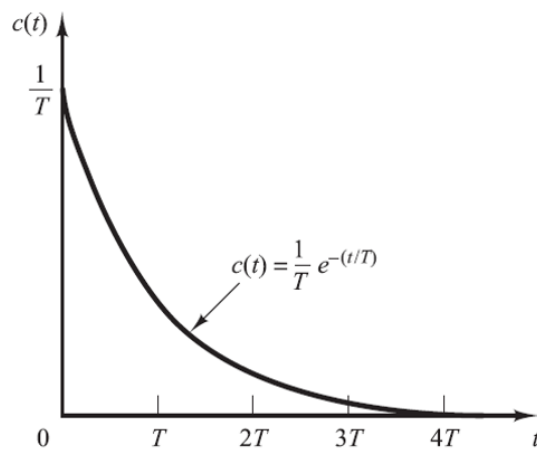


Fig. 26. Resposta impuls unitari sistema primer ordre

2.2. Sistemes de segon ordre

Partint d'un esquema de segon ordre genèric, la funció de transferència en llaç tancat obtinguda és la següent:

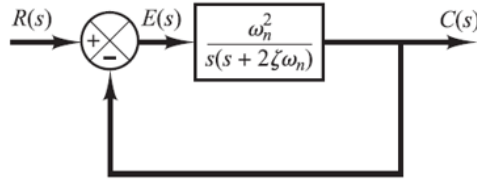


Fig. 27. Sistema segon ordre

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

on:

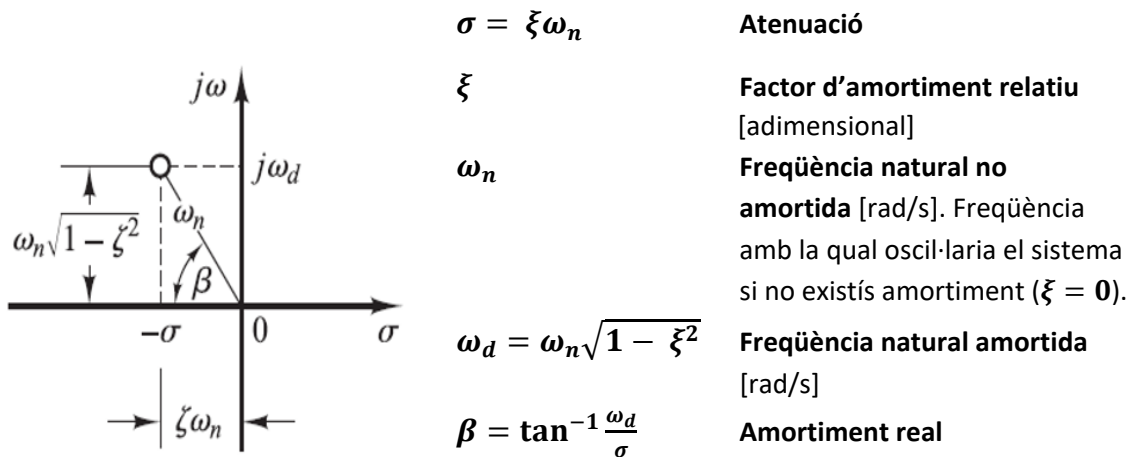


Fig. 28. Definició paràmetres sistema segon ordre

En el cas dels sistemes de segon ordre, pel fet que la variable s és complexa i es pot definir com:

$$s = \sigma + j\omega$$

Poden presentar els següents tres casos:

- Hi ha dos pols reals diferents.
- Hi ha dos pols reals iguals.
- Hi ha un pol complex conjugat.

Fet que dependrà del factor d'amortiment relatiu (ζ), com es veurà més endavant.

El comportament dinàmic del sistema de segon ordre per a un senyal d'entrada esglaió unitari, el detallarem a continuació en termes dels dos paràmetres ζ i ω_n . Per poder observar el comportament dinàmic temporal, es realitzarà la transformada inversa de *Laplace*. En primer lloc, la transformada de *Laplace* d'un senyal esglaió unitari és $R(s) = 1/s$, per tant:

$$C(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Expressant-ho en fraccions parcials, s'obté:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

Realitzant la transformada inversa de Laplace, s'obté:

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t \right) \\ &= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \text{sen} \left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \quad \text{per } t \geq 0 \end{aligned}$$

Per tant, el senyal d'error en el domini temporal es pot expressar com:

$$e(t) = r(t) - c(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t \right) \quad \text{per } t \geq 0$$

Modificant el valor de ξ s'obtingran quatre casos diferents:

a. Cas críticament estable o no esmorteït ($\xi = 0$)

Els pols enllaç tancat són complexos conjugats i es situen damunt de l'eix $j\omega$.

La resposta es torna no amortida i les oscil·lacions continuen indefinidament.

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

b. Cas subesmorteït ($0 < \xi < 1$)

Els pols enllaç tancat són complexos conjugats i negatius.

En estat estacionari ($t = \infty$) no existeix error envers l'entrada i la sortida.

La resposta transitòria és oscil·latòria.

c. Cas críticament esmorteït ($\xi = 1$)

Els pols enllaç tancat són reals, negatius i iguals.

La resposta transitòria està al límit de l'oscil·lació.

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

d. Cas sobre esmorteït ($\xi > 1$)

Els pols enllaç tancat són reals, negatius i diferents.

Aproximació a un sistema de primer ordre

$$c(t) = 1 - e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}$$

La resposta transitòria no oscil·la.

En l'anterior fase, s'ha dissenyat dos sistemes subesmorteïts ($0 < \xi < 1$), primera i segona planta; i un sistema sobre esmorteït ($\xi > 1$), cinquena planta.

2.2.1. Definicions de les especificacions de la resposta transitòria

En nombrosos casos, com aquest, les especificacions d'un sistema de control s'expressaran en termes de quantitats en el domini del temps. Normalment, aquestes especificacions es donen per a una entrada esglaió unitari, ja que es fàcil de generar i és suficientment dràstica.

La resposta transitòria d'un sistema de control, exhibeix amb freqüència oscil·lacions amortides abans d'assolir l'estat estable. Al determinar les característiques de la resposta transitòria d'un sistema de control per a una entrada esglaió unitari, és comú especificar:

- **Temps de retard, t_d**
- **Temps de pujada, t_r**
- **Temps de pic, t_p**
- **Sobre elongació, M_p**
- **Temps d'assentament, t_s**

Aquestes especificacions es definiran a continuació.

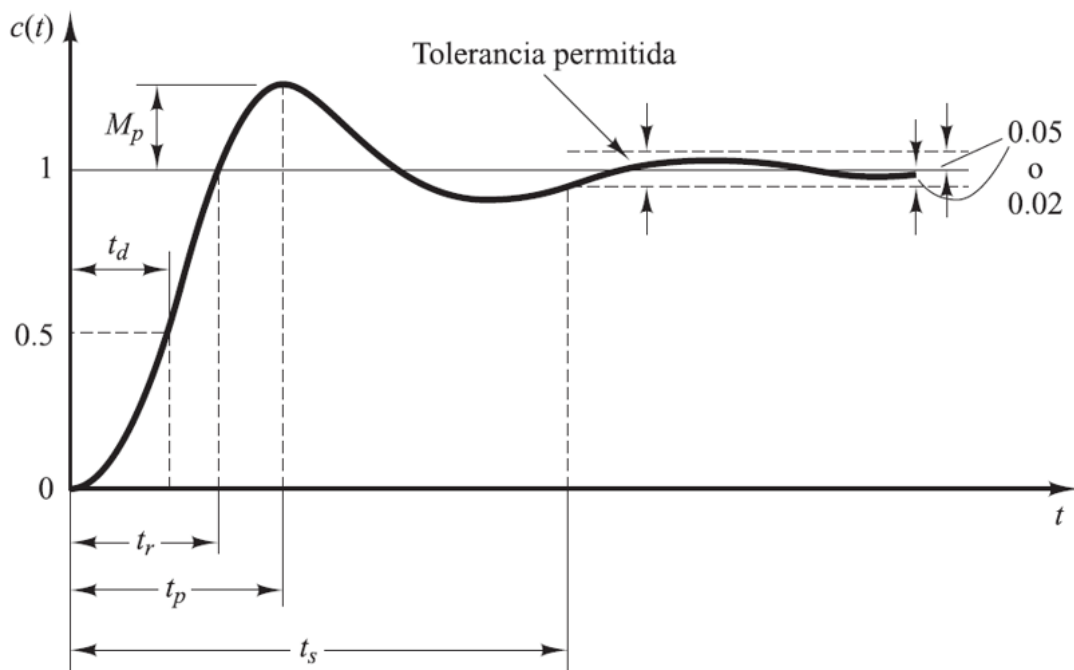


Fig. 29. Corba de resposta esglaió unitari sistema segon ordre

- **Temps de retard.** Temps requerit perquè la resposta assoleixi per primera vegada la meitat del valor final.
- **Temps de pujada.** Temps requerit perquè la resposta passi del 10 al 90%, del 5 al 95% o del 0 al 100% del seu valor final. Per a sistemes subesmorteïts s'acostuma a utilitzar el temps de pujada de 0 al 100%; mentre que per a sistemes sobre esmorteïts, es sol utilitzar el de 10 al 90%.
- **Temps de pic.** Temps requerit perquè la resposta assoleixi el primer pic de sobre elongació.

- **Sobre elongació màxima [%].** Valor del pic màxim de la corba de resposta, mesurat a partir del valor final de la senyal de sortida. La quantitat de sobre elongació màxima ens indica de manera directa l'estabilitat relativa del sistema.
- **Temps d'assentament.** Temps que es requereix perquè la corba de resposta assoleixi un rang al voltant del valor final de la mesura especificada pel percentatge absolut del valor final; per lo general, de 2% (utilitzada per la comanda *stepinfo()* de *Matlab*) a 5%; i romanguí dins d'ell. Es relaciona amb la major constant de temps del sistema de control.

Es poden obtenir aquests paràmetres en termes de ξ i ω_n . Per realitzar els càlculs es suposarà que el sistema és subesmorteït. Les següents fórmules sol seran vàlides per a sistemes definits com:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \text{ amb } R(s) = \frac{1}{s}$$

Per tant, es poden expressar les especificacions en resposta temporal per a un sistema de segon ordre com:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \text{ [s]}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \text{ [s]}$$

$$Mp = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(\xi/\sqrt{1-\xi^2})\pi} \text{ [%]}$$

$$t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\xi \cdot \omega_n} \text{ [s]} \quad (\text{criteri del 2\%})$$

$$t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\xi \cdot \omega_n} \text{ [s]} \quad (\text{criteri del 5\%})$$

El sistema de control s'ha de modificar fins que la resposta transitòria sigui satisfactòria, a criteri del dissenyador.

En la majoria de casos, excepte en aquells que no es poden tolerar oscil·lacions, és convenient que la resposta transitòria sigui suficientment ràpida i amortida. Per tant, per un sistema de segon ordre, el factor de amortiment relatiu (ξ) deu estar entre 0.4 i 0.8. Valors petits de ξ ($\xi < 0.4$) produeixen un valor de sobre elongació (M_p) excessiu en la resposta transitòria; i un sistema amb un valor gran de ξ ($\xi > 0.8$) respon amb lentitud.

2.3. Sistemes d'ordre superior

La resposta dels sistemes d'ordre superior és la suma de la resposta dels sistemes de primer i segon ordre.

La resposta transitòria d'aquest tipus de sistema a qualsevol entrada s'obindrà mitjançant una simulació per computadora. Per obtenir l'expressió analítica per a la resposta transitòria, serà necessari factoritzar el polinomi del denominador. Si s'utilitza el programari *Matlab*, es pot emprar la comanda **roots(den)**. Un cop factoritzats el numerador i el denominador, la funció de transferència del nostre sistema s'escriurà com:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot (s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

Per a una entrada esglaó d'amplitud a es pot expressar la sortida com

$$C(s) = \frac{a}{s} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + p_i}$$

on a_i és el residu del pol $s = -p_i$.

Si tots els pols enllaç tancat es troben en el semiplà esquerre del pla s , les magnituds relatives dels residus (a_i) determinaran la importància relativa dels components en la forma expandida de $C(s)$. Un parell de pol-zero propers entre si, es cancel·laran un a l'altre. Si un pol es localitza molt lluny de l'origen, el seu residu pot ser petit. Els valors transitoris que correspondran a aquest pol seran petits i seran efímers.

Per tant, es pot afirmar que, la distància horitzontal del pol enllaç tancat a l'eix $j\omega$ determinarà el temps d'assentament dels transitoris produïts per aquest. A menor distància, més prolongat és el temps d'assentament. Aquesta última afirmació es compleix per tots els sistemes, independentment de l'ordre que tingui aquest.

Concloent, els pols enllaç tancat determinen principalment el tipus de resposta transitòria; mentre que els zeros enllaç tancat determinen principalment la forma de la resposta transitòria.

Els pols enllaç tancat més propers a l'eix $j\omega$ dominaran el comportament de la resposta transitòria, ja que corresponen als termes de la resposta transitòria que disminueixen lentament. Amb molta freqüència aquests apareixen en forma d'un parell complex conjugat. Aquests es coneixen com a **pols dominants enllaç tancat**.

Més endavant utilitzarem aquest concepte per modificar el comportament de les nostres plantes, partint de la premissa que aquestes ja estan fixades i són invariables.

2.4. Anàlisi d'estabilitat en el pla complex

L'estabilitat d'un sistema lineal enllaçat es determina mitjançant la ubicació dels pols enllaçat en el pla s . Aquesta és una propietat del sistema en si mateix, no depèn de la senyal d'entrada. Els pols de la senyal d'entrada contribueixen als termes de la resposta en estat estable.

Per tant, es pot diferenciar envers un sistema *estable*, un *inestable* i un *críticament estable*.

El sistema *estable* té tots els pols enllaçat a l'esquerra de l'eix $j\omega$. Això comporta el fet que qualsevol resposta transitòria acaba per assolir l'equilibri. S'ha de tenir en compte, que això no garanteix característiques satisfactòries de resposta transitòria. Si els *polos dominants complexos conjugats* enllaçat es troben propers a l'eix $j\omega$, la resposta transitòria exhibirà oscil·lacions excessives o serà molt lenta.

Matemàticament els pols enllaçat que es localitzen sobre l'eix $j\omega$ produiran oscil·lacions, l'amplitud de les quals és mantindrà constant, sistema *críticament estable*. Per aquest motiu, un sistema de control no hauria de tenir pols enllaçat en l'eix $j\omega$.

Per altra banda, en el sistema *inestable*, algun pol es troba en el semiplà dret de l'eix $j\omega$. A mesura que el temps augmenta, aquest pol imposarà el mode dominant i la resposta transitòria augmentarà de forma monòtona o oscil·larà amb una amplitud creixent. Tan aviat com el sistema es connecti a la font d'alimentació, la sortida augmentarà indefinidament. Aquest fet pot originar un dany o una errada en el sistema.

Per garantir característiques de resposta transitòria ràpides i ben amortides, és necessari que els pols enllaçat del sistema es trobin en la següent regió delimitada:

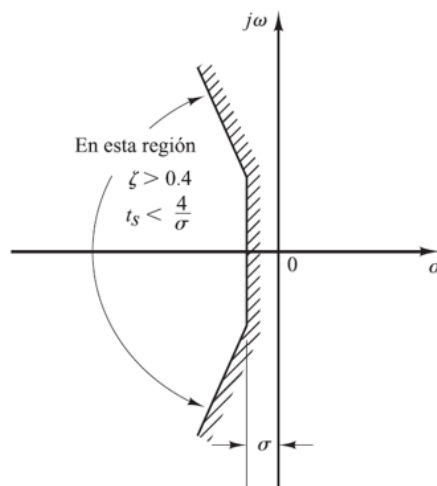


Fig. 30. Regió del pla complex que satisfà les condicions $\zeta > 0.4$ i $t_s < 4/\sigma$

En molts casos, la funció de transferència es trobarà expressada amb polinomis sense factoritzar, un criteri simple i ràpid per determinar si existeixen o no arrels inestables en l'equació polinòmica, sense factoritzar, és el **Criteri d'estabilitat de Routh**.

En aquest projecte, no ens caldrà aplicar el *Criteri d'estabilitat de Routh*, ja que *Matlab* proporciona una funció pròpia que ens dibuixarà el **lloc geomètric de les arrels**, concepte que s'explicarà a continuació, *rlocus(sys)*.

2.5. Error en estat estacionari en els sistemes de control amb realimentació unitària

Partirem de la premissa que qualsevol sistema de control, per naturalesa, sofreix un error en estat estacionari (e_{ss}) en resposta a certs tipus d'entrada. Un mateix sistema pot no tenir un error en estat estacionari per una entrada esglaó, però al mateix temps, pots mostrar un error en estat estacionari per una entrada rampa.

L'error en estat estacionari depèn de:

- El senyal d'entrada (esglaó, rampa o paràbola).
- Tipus** de la funció de transferència en llaç obert del sistema.

Els sistemes de control es classifiquen d'acord amb la seva capacitat per a seguir entrades esglaó, rampa, paràbola, etc.

L'esquema de classificació es basa en la quantitat d'integracions indicades per la funció de transferència en llaç obert.

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)}$$

El terme s^N del denominador, que representa un pol de multiplicitat N en l'origen, indica el *tipus* de sistema (*Tipus 0* ($N = 0$), *tipus 1* ($N = 1$), *tipus 2* ($N = 2$) i *tipus 3* ($N = 3$)). A mesura que el *tipus* augmenta, millora la precisió del sistema; però, agreuja el problema de l'estabilitat. En la pràctica, no és comú tindre sistemes de *tipus 3* o superiors, per lo general, resulta difícil dissenyar sistemes estables que tinguin dos o més integradors en la trajectòria directa.

El *tipus* de sistema és diferent de l'ordre del sistema, que com hem vist anteriorment, és el grau del seu polinomi característic.

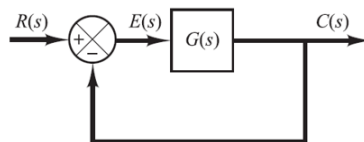


Fig. 31. Sistema genèric realimentació unitària

Partint del sistema de control genèric amb realimentació unitària de la Fig. 31, la funció de transferència en llaç tancat és:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Expressant la senyal de sortida en funció de la d'entrada s'obté:

$$C(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + G(s)}$$

El senyal d'error el podem expressar com:

$$E(s) = R(s) - C(s) = R(s) - \frac{R(s)G(s)}{1 + G(s)} = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

Aplicant el *teorema del valor final*, que proporciona una forma convenient de trobar l'acompliment en estat estable d'un sistema estable, s'obté l'error en estat estable:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot R(s)}{1 + G(s)}$$

La forma física de la sortida no ve al cas en l'anàlisi actual. Per tant, en el successiu es denominarà:

- **Constant d' error de posició estàtica K_p .** Error en estat estacionari del sistema per una entrada esglaió unitari.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

- **Constant d' error de velocitat estàtica K_v .** Error en estat estacionari del sistema per una entrada rampa unitària.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} (s + sG(s))} = \frac{1}{K_v}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)$$

- **Constant d' error d'acceleració estàtica K_a .** Error en estat estacionari del sistema per una entrada paràbola unitària (entrada acceleració).

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} (s^2 + s^2 G(s))} = \frac{1}{K_a}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

Les constants d'error estàtic són figures de mèrit propi dels sistemes de control. Contra més altes siguin les constants, més petit serà l'error en estat estacionari.

	Entrada escalón $r(t) = 1$	Entrada rampa $r(t) = t$	Entrada aceleración $r(t) = \frac{1}{2} t^2$
Sistema tipo 0	$\frac{1}{1 + K}$	∞	∞
Sistema tipo 1	0	$\frac{1}{K}$	∞
Sistema tipo 2	0	0	$\frac{1}{K}$

Taula 12. Error en estat estacionari en termes del guany K

La Taula 12 resumeix els errors en estat estacionari per als sistemes de tipus 0, tipus 1 i tipus 2 per a diferents entrades (esglaió, rampa i paràbola). S'ha de recordar que els termes *error de posició*, *velocitat* i *acceleració* signifiquen les desviacions en estat estable en la posició de sortida.

3. Accions bàsiques de control

En aquest projecte utilitzarem controladors per modificar el comportament de les plantes dissenyades en la primera fase del projecte, més concretament:

- a. **Controladors Proporcional (P)**
- b. **Controladors Integrals (I)**
- c. **Controladors Proporcional – Integrals (PI)**
- d. **Controladors Proporcional – Derivatiu (PD)**
- e. **Controladors Proporcional – Integrals – Derivatiu (PID)**

3.1. Acció de control Proporcional (P)

En un controlador Proporcional, la relació entre la sortida del controlador, senyal de control $u(t)$ i la senyal d'error $e(t)$ és:

$$u(t) = K_p e(t)$$

Realitzant la transformada de *Laplace*, es pot expressar la funció de transferència com:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

On K_p es considera el *guany proporcional*. No té relació amb la constant d'error de posició estàtica K_p .

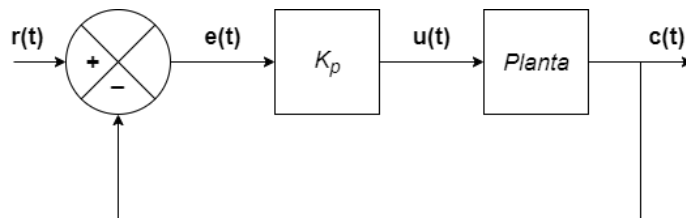


Fig. 32. Diagrama de blocs d'un controlador Proporcional

El controlador proporcional és un amplificador amb guany ajustable. S'ha de tenir en compte que augmentant el valor de K_p disminuïm l'error en estat estacionari, no l'eliminem; augmentem els sobre pics en la resposta transitòria i també la inestabilitat.

3.2. Acció control Integral (I)

L'acció de control d'un controlador Integral és defineix mitjançant:

$$u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt$$

Realitzant la transformada de *Laplace*, es pot expressar la funció de transferència com:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

On K_i és una constant ajustable. En ocasions l'acció de control integral s'anomena control de reajustament (reset), degut a que elimina l'error en estat estacionari, en funció del *tipus* del sistema i de la senyal d'entrada.

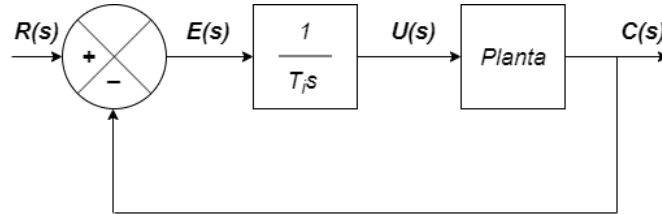


Fig. 33. Diagrama de blocs d'un controlador Integral

3.3. Acció de control Proporcional – Integral (PI)

L'acció de control d'un controlador Proporcional – Integral és defineix mitjançant:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

Realitzant la transformada de *Laplace*, es pot expressar la funció de transferència com:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

On K_p és el *guany proporcional* i T_i s'anomena *temps integral*. Tant K_p com T_i són ajustables. En aquest controlador T_i regula l'acció del control integral, mentre que K_p afecta les dues accions de control.

En implementar el controlador Proporcional – Integral afegim un pol en l'origen de coordenades, augmentant el *tipus* del sistema.

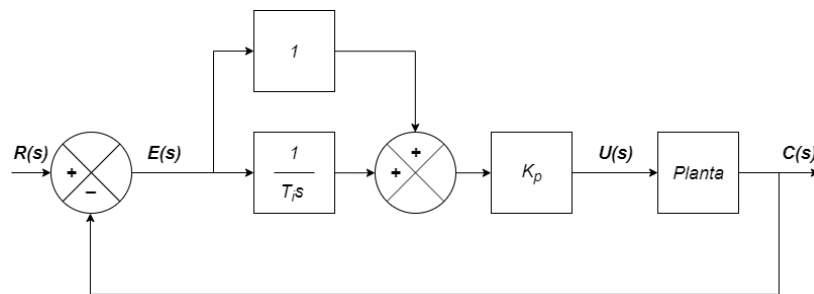


Fig. 34. Diagrama de blocs d'un controlador Proporcional – Integral

3.4. Acció de control Proporcional – Derivativa (PD)

L'acció de control d'un controlador Proporcional – Derivatiu es defineix mitjançant:

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

Realitzant la transformada de *Laplace*, es pot expressar la funció de transferència com:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s) = K_p + K_d s$$

On T_d és el *temps derivatiu*, interval de temps durant el qual l'acció de la velocitat fa avançar l'efecte de l'acció de control proporcional.

L'acció de control derivativa es coneix també com *control de velocitat*, degut a que es manifesta quan la magnitud de sortida del controlador $u(t)$ és proporcional a la velocitat de canvi de la senyal d'error $e(t)$.

Encara que l'acció de control derivatiu té l'avantatge de ser predictiu, amplifica els senyals de soroll i pot produir un efecte de saturació en l'actuador. La seva acció no elimina l'error en estat estacionari e_{ss} , únicament avança l'acció de control, arriba abans. A més a més, aquesta no s'utilitza mai sola, ja que sol és eficaç durant períodes transitius. Afegeix amortiment al sistema i permet l'ús d'un valor més gran de guany, el qual produeix una millora en la precisió en estat estacionari.

A l'implementar el controlador Proporcional – Derivatiu, afegim un zero al sistema ($s + 1/T_d$).

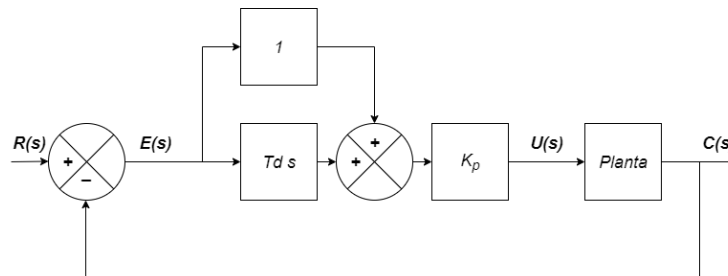


Fig. 35. Diagrama de blocs d'un controlador Proporcional – Derivatiu

3.5. Acció de control Proporcional – Integral – Derivativa (PID)

L'acció de control Proporcional – Integral – Derivativa presenta els avantatges de cadascuna de les tres accions de control individuals que la formen: previsió, amplificació i reajustament. L'equació d'un controlador amb aquesta acció combinada s'obté mitjançant:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

Realitzant la transformada de *Laplace*, es pot expressar la funció de transferència com:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

On K_p és el guany proporcional, T_i és el temps integral i T_d és el temps derivatiu.

Implementant el controlador *PID* afegim dos zeros ($s + z_1$, $s + z_2$) i un pol a l'origen de coordenades. Per tant augmentem el tipus del nostre sistema.

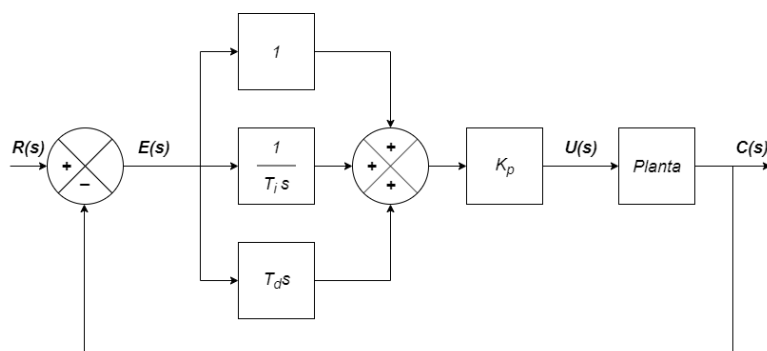


Fig. 36. Diagrama de blocs d'un controlador Proporcional-Integral-Derivatiu

3.6. Implementació electrònica dels controladors

Com s'ha esmentat a l'inici de l'apartat 4, per a modificar el comportament de les plantes dissenyades en la primera fase, utilitzarem els controladors descrits en els apartats anteriors.

Per a implementar electrònicament els controladors requerirem d'amplificadors operacionals, de resistències i de condensadors, mateixos components amb els quals s'ha dissenyat les plantes en la primera fase.

El model PID presentat per Katsuhiki Ogata en *Ingeniería de Control Moderna*³, Fig.37, permet alternar ràpidament entre els controladors. La Taula 13 indica els components necessaris per aconseguir el controlador desitjat.

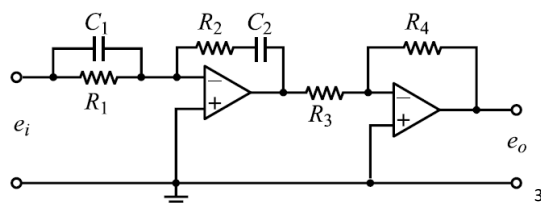


Fig. 37. Model del controlador PID presentat per Katsuhiki Ogata en el seu llibre *Ingeniería de Control Moderna*

Controlador	$R_1 (\Omega)$	$R_2 (\Omega)$	$R_3 (\Omega)$	$R_4 (\Omega)$	$C_1 (F)$	$C_2 (F)$
P	R_A	R_B	R_C	R_D	C.O	C.C
I	R_A	C.C	R_C	R_D	C.O	C_B
PD	R_A	R_B	R_C	R_D	C_A	C.C
PI	R_A	R_B	R_C	R_D	C.O	C_B
PID	R_A	R_B	R_C	R_D	C_A	C_B

Taula 13. Configuració dels controladors

On C.C indica curt-circuit i C.O indica circuit obert.

Calculant la funció de transferència $E_o(s)/E_i(s)$ de l'esquema de la Fig.37 pels diferents controladors, s'obté la següent taula d'equivalències entre les funcions de transferència dels

³ Katsuhiko Ogata, "Ingeniería de control moderna, 5ª edición", Pearson Education, 2010.

controladors i els seus semblants electrònics. En el nostre cas el senyal $E_i(s)$ serà el senyal d'error $E(s)$ i el senyal $E_o(s)$ serà la senyal de control $U(s)$.

Controlador	Funció transferència	K_p	K_i	K_d
P	K_p	$\frac{R_B R_D}{R_A R_C}$		
I	$\frac{K_i}{s}$		$\frac{R_D}{R_A R_C C_B}$	
PD	$K_p + K_d s$	$\frac{R_B R_D}{R_A R_C}$		$\frac{R_B R_D C_A}{R_C}$
PI	$K_p + \frac{K_i}{s}$	$\frac{R_B R_D}{R_A R_C}$	$\frac{R_D}{R_A R_C C_B}$	
PID	$K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$	$\frac{R_D \cdot (R_B C_B + R_A C_A)}{R_A R_C C_B}$	$\frac{R_D}{R_A R_C C_B}$	$\frac{R_B R_D C_A}{R_C}$

Taula 14. Equivalència controladors amb el seu semblant electrònic

4. Anàlisi del lloc geomètric de les arrels

Aquest apartat és fonamental per a entendre el comportament dels sistemes de control. Per començar recuperarem conceptes que hem anat esmentant en els apartats anteriors que seran de gran ajuda per a entendre millor aquest concepte.

La *resposta transitòria* d'un sistema en llaç tancat es relaciona amb els pols en llaç tancat.

Si el sistema té un guany variable (K), la localització dels pols en llaç tancat depèn del valor del guany escollit. És important conèixer com es mouen els pols en llaç tancat en el pla s conforme varia el guany del llaç.

Des del punt de vista del disseny, un simple ajust en el guany pot moure els pols en llaç tancat a les posicions desitjades. El disseny es centra en seleccionar un valor de guany adequat. En altres casos, aquest ajust no produirà un resultat convenient i serà necessari afegir un compensador al sistema.

Els pols en llaç tancat són les arrels de la equació característica. Trobar les arrels de la equació característica té un valor limitat, ja que a mesura que varia el guany de la funció de transferència en llaç obert, l'equació característica varia.

El **mètode del lloc de les arrels** permet trobar les arrels de l'equació característica per a tots els valors (de 0 a ∞) d'un paràmetre del sistema, K . Mitjançant aquest mètode, es podrà predir els efectes que té variar el valor del guany o afegir pols i/o zeros en llaç obert.

Al dissenyar un sistema de control lineal el *mètode del lloc geomètric de les arrels* ens indica la forma en la que es deuen modificar els pols i zeros en llaç obert perquè la resposta compleixi les especificacions d'acompliment del sistema.

En aquest projecte generarem el lloc geomètric de les arrels utilitzant la funció ***rlocus()*** que ens proporciona *Matlab*.

4.1. Condició d'angle i de magnitud

Partint el sistema genèric de la Fig.38, sistema de control amb realimentació negativa. La funció de transferència enllaç tancat és:

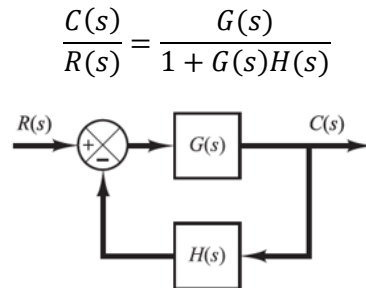


Fig. 38. Sistema de control

L'equació característica per aquest sistema enllaç tancat s'obté igualant el denominador de l'equació de transferència a 0. És a dir:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

O bé:

$$G(s)H(s) = -1$$

Es suposa que $G(s)H(s)$ és un quocient de polinomis en s . Donat que $G(s)H(s)$ és una quantitat complexa, l'equació anterior es divideix en dues igualant els angles i les magnituds de tots dos membres, per a obtenir:

- **Condició d'angle:**

$$\angle KG(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k + 1), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- **Condició de magnitud:**

$$|KG(s)H(s)| = 1$$

Els valors de s que compleixen la condició d'angle i la de magnitud són les arrels de l'equació característica, pols enllaç tancat.

El lloc de les arrels és una gràfica dels punts del pla s que satisfan la condició d'angle.

Per un cert valor del guany (K), els pols enllaç tancat, arrels de l'equació característica, estaran a p . On p serà el pol objectiu p_{obj} , que complirà amb un seguit de característiques en el domini temporal. Per determinar aquest valor de guany, s'emprarà l'equació de la condició de magnitud:

$$K = \frac{1}{|G(s)H(s)|_{s=p_{obj}}}$$

4.2. Disseny de sistemes de control mitjançant el mètode del lloc de les arrels

Es parteix de la premissa de què les plantes estan definides i són inalterables. Per tant, la compensació d'un sistema es basa en el disseny d'un filtre. Les característiques d'aquest, tendeixen a compensar els inconvenients o paràmetres inalterables de les plantes.

El disseny pel mètode del lloc de les arrels es basa a redibuixar el lloc de les arrels del sistema afegint pols i zeros a la funció de transferència enllaç obert del sistema, i fer que el lloc de les arrels passi pels pols enllaç tancat desitjats en el pla s .

El disseny del lloc de les arrels es basa en la hipòtesi que el sistema enllaç tancat té un parell de pols dominants. Això significa que els efectes dels zeros i els pols addicionals no afecten gairebé a les característiques de la resposta.

El mètode del lloc de les arrels s'utilitza quan les especificacions de disseny es donen en el domini temporal:

- Pols dominants enllaç tancat (ξ i ω_d)
- Sobre elongació màxima
- Temps d'aixecament
- Temps d'assentament

El resultat de dissenyar un sistema de control pel mètode del lloc de les arrels no és únic.

És de gran importància conèixer els efectes que produeix afegir pols i zeros en la funció de transferència enllaç obert del sistema.

Efectes de la inserció de pols. La inserció d'un pol a la funció de transferència enllaç obert tendeix a desplaçar el lloc de les arrels a la dreta, per tant, disminueix l'estabilitat i retarda el temps d'assentament de la resposta transitòria. Control integral.

Efectes de la inserció de zeros. La inserció d'un zero a la funció de transferència enllaç obert tendeix a desplaçar el lloc de les arrels a l'esquerra, per tant, augmenta l'estabilitat i accelera el temps d'assentament de la resposta. Control derivatiu.

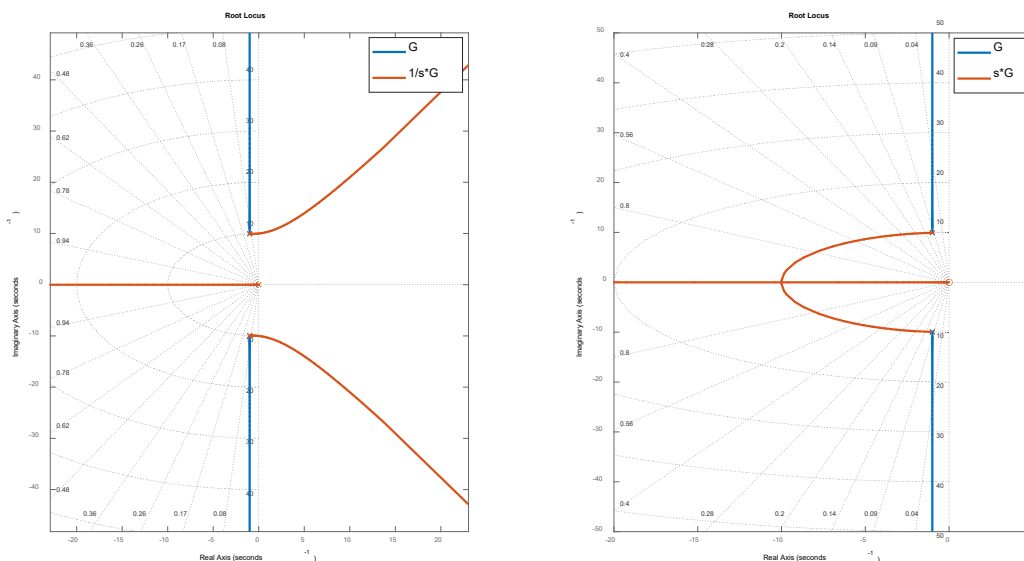


Fig. 39. Efectes de la inserció d'un pol (esquerra) i de la inserció d'un zero (dreta) en el lloc geomètric de les arrels

5. Anàlisi de sistemes de control pel mètode de la resposta en freqüència

A partir d'aquest mètode és vol fer referència a la resposta d'un sistema en estat estacionari a una entrada sinusoidal. Es varia la freqüència del senyal d'entrada (ω) en un cert rang, per a estudiar la resposta resultant (mòdul i fase).

La informació obtinguda és diferent a la de l'anàlisi del lloc de les arrels. De fet, els dos mètodes es complementen.

L'avantatge que aporta el mètode de la resposta en freqüència es que es poden utilitzar les dades obtingudes de les mesures sobre el sistema físic sense deduir el seu model matemàtic. També, permet dissenyar sistemes en els que s'eliminen els efectes del soroll a determinades freqüències.

La *funció de transferència sinusoidal* $G(j\omega)$ de qualsevol sistema lineal $G(s)$ s'obté substituint s per $j\omega$ en la funció de transferència del sistema.

La sortida d'un sistema estable i invariant en el temps (LTI) exposat a una entrada sinusoidal, tindrà, en estat estacionari:

- La mateixa freqüència que la entrada (ω).
- Diferent amplitud (factor K, en funció de ω).
- Desplaçament de fase (ϕ , en funció de ω):
 - Si $\phi > 0$: $G(j\omega)$ és tractarà d'una xarxa d'avançament
 - Si $\phi < 0$: $G(j\omega)$ és tractarà d'una xarxa de retard

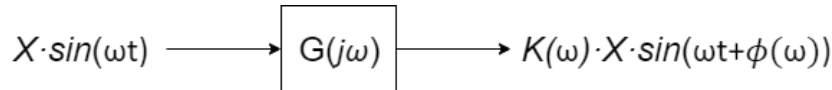


Fig. 40. Sistema LTI

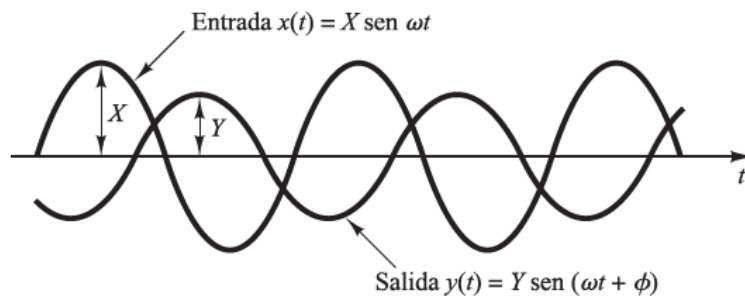


Fig. 41. Senyals sinusoidals d'entrada i sortida.

Com $G(j\omega)$ és una quantitat complexa, es pot reescriure de la següent manera:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi}$$

On $|G(j\omega)|$ representa la magnitud i ϕ l'angle de $G(j\omega)$ és a dir:

- **Magnitud:** Quocient d'amplitud entre les senyals sinusoidals de sortida i d'entrada.

$$K(\omega) = |G(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right|$$

- **Angle o fase:** Desplaçament de fase del senyal sinusoidal de sortida amb respecte a la d'entrada.

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \angle \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Per tant, la característica de la resposta en estat estacionari d'un sistema per a una entrada sinusoidal s'obté directament de:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = G(j\omega)$$

Per a la representació de les característiques de la resposta en freqüència de forma gràfica s'utilitzaran dues representacions gràfiques de les funcions de transferència sinusoidals:

- El **diagrama de Bode** o diagrama logarítmic.
- El **diagrama de Nyquist** o diagrama polar.

5.1. Diagrama de Bode

El *diagrama de Bode* està format per dues gràfiques:

- Gràfica del logaritme de la magnitud de la funció de transferència sinusoidal.
- Gràfica de l'angle de fase

Ambdues es dibuixen envers la freqüència en escala logarítmica.

La representació comú de la magnitud logarítmica de $G(j\omega)$ és $20 \log|G(j\omega)|$, on el logaritme és de base 10. La unitat utilitzada en aquesta representació per a la magnitud és el decibel, generalment abreujat com dB. En canvi, la unitat utilitzada per a la fase són els graus.

Per tant, si és té en consideració el valor del guany de la funció de transferència:

- Si $|G(s)| = 1 \rightarrow \text{dB} = 0$
- Si $|G(s)| > 1 \rightarrow \text{dB} > 0$
- Si $|G(s)| < 1 \rightarrow \text{dB} < 0$

El principal avantatge d'utilitzar el *diagrama de Bode* és que la multiplicació de magnituds es converteix en sumes, propietat del logaritme. A més a més, compta amb un mètode molt simple per a dibuixar una corba aproximada de magnitud logarítmica. Aquest es basa amb aproximacions asimptòtiques, línies rectes. Aquesta aproximació és suficient si sol es necessita informació general sobre la característica de la resposta en freqüència.

En els *diagrames de Bode*, les raons de freqüència s'expressen en termes d'octaves o dècades:

- 1 octava \rightarrow de ω a 2ω
- 1 dècada \rightarrow de ω a 10ω

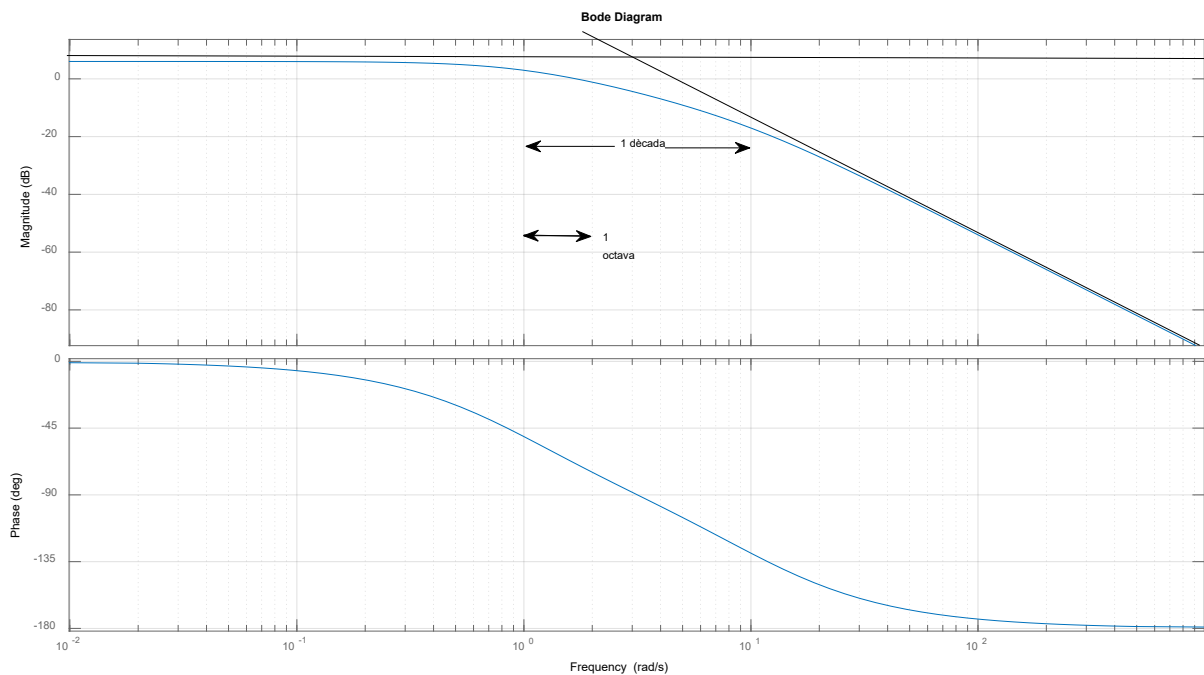


Fig. 42. Diagrama de Bode

5.1.1. Freqüència de tall i ample de banda

La freqüència ω_b en la qual la magnitud de resposta en freqüència en llaç tancat es troba a 3 dB per sota del seu valor de freqüència zero, $G(0)$, es denomina freqüència de tall.

El sistema en llaç tancat filtra les components de la senyal de les freqüències les quals són majors que la freqüència de tall i permet el pas d'aquelles amb freqüències menors que la freqüència de tall.

L'ample de banda es el rang de la freqüència en el qual la magnitud de $G(j\omega)$ és major que -3 dB. Aquest indica la freqüència a la qual el guany comença a superar el seu valor de baixa freqüència. Per tant, l'ample de banda indica com de bé el sistema segueix una entrada sinusoidal.

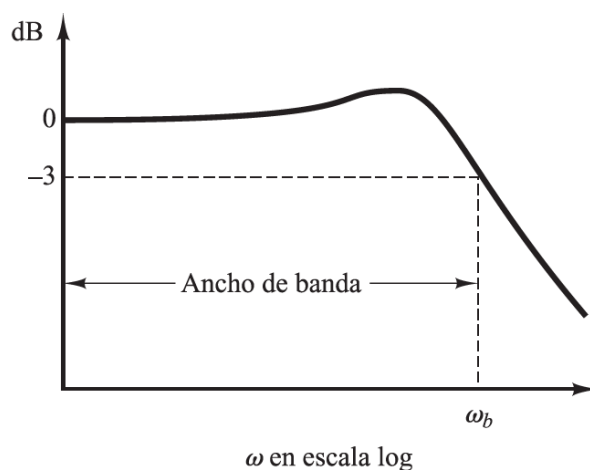


Fig. 43. Freqüència de tall i ample de banda

5.1.2. Factors bàsics

Com s'ha esmentat anteriorment, l'avantatge principal d'utilitzar un diagrama logarítmic és la facilitat relativa de dibuixar les corbes de la resposta en freqüència. Els factors bàsics que solen presentar una funció de transferència arbitrària $G(j\omega)H(j\omega)$ són:

- El **guany** K
- Els **factors derivatius i integrals** $(j\omega)^{\pm 1}$
- Els **factors de primer ordre** $(1 + j\omega T)^{\pm 1}$
- Els **factors quadràtics** $\left[1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{\pm 1}$

Un cop coneguts els diagrames logarítmics d'aquests factors bàsics, es podrà construir un diagrama logarítmic per a qualsevol forma de $G(j\omega)H(j\omega)$ dibuixant les corbes per a cada factor i sumant les corbes individuals de forma gràfica, ja que sumar els logaritmes dels guanys correspon a multiplicar-los entre ells.

5.1.2.1. Guany (K)

La corba de magnitud logarítmica per a un guany constant K és una recta horitzontal, el valor de la qual és de $20 \log(K)$ decibels. L'angle de fase del guany K és zero.

L'efecte de variar el guany K en la funció de transferència és pujar o baixar la corba de magnitud logarítmica de la funció de transferència en la quantitat constant corresponent, sense afectar a la corba de fase.

5.1.2.2. Factors derivatius i integrals $(j\omega)^{\pm 1}$

· Derivador ($j\omega$)

Mòdul:

$$20 \cdot \log|j\omega| = 20 \cdot \log\sqrt{0^2 + \omega^2} = 20 \cdot \log \omega \text{ dB}$$

El pendent de la recta és de 20 dB/dècada .

Fase:

$$\tan^{-1} \frac{\omega}{0} = 90^\circ$$

· Integrador ($1/j\omega$)

Mòdul:

$$20 \cdot \log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = 20 \cdot \log(1) - 20 \cdot \log|j\omega| = -20 \cdot \log \omega \text{ dB}$$

El pendent de la recta és de -20 dB/dècada .

Fase:

$$\tan^{-1} \frac{0}{1} - \tan^{-1} \frac{\omega}{0} = 0^\circ - 90^\circ = -90^\circ$$

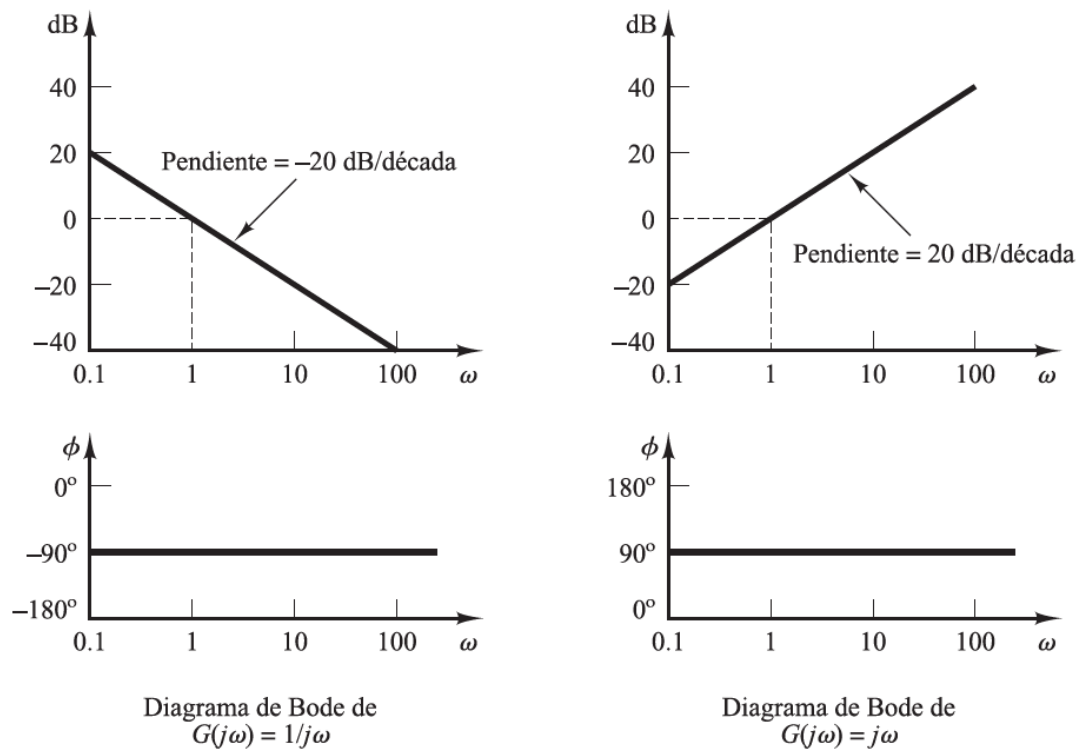


Fig. 44. Diagrama de Bode factor integrador i derivatiu

Si la funció de transferència conté un factor derivatiu o integral d'ordre n , es tindrà:

· **Derivador $(j\omega)^n$**

Mòdul:

$$20 \cdot \log |(j\omega)^n| = 20n \cdot \log \omega \text{ dB}$$

El pendent de la recta és de $20n \text{ dB/dècada}$.

Fase:

$$n \cdot 90^\circ$$

· **Integrador $(1/j\omega)^n$**

Mòdul:

$$20 \cdot \log \left| \left(\frac{1}{j\omega} \right)^n \right| = -20 \cdot n \cdot \log \omega \text{ dB}$$

El pendent de la recta és de $-20n \text{ dB/dècada}$.

Fase:

$$-n \cdot 90^\circ$$

5.1.2.3. Factors de primer ordre $((1 + j\omega T)^{\pm 1})$

- **Derivador $(1 + j\omega T)$**

Mòdul:

$$20 \cdot \log|1 + j\omega T| = 20 \cdot \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \text{ dB}$$

Fase:

$$\tan^{-1} \frac{\omega T}{1} = \tan^{-1} \omega T \quad (\text{de } 0 \text{ a } 90^\circ)$$

- **Integrador $(1 / 1 + j\omega T)$**

Mòdul :

$$20 \cdot \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \cdot \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \text{ dB}$$

Fase:

$$\tan^{-1} \frac{0}{\omega T} - \tan^{-1} \frac{\omega T}{1} = -\tan^{-1} \omega T \quad (\text{de } 0 \text{ a } -90^\circ)$$

La corba de magnitud logarítmica variarà segons el valor de la freqüència (ω):

- Si $\omega = 1/T \rightarrow$ Mòdul = $\pm 20 \cdot \log \sqrt{1 + 1} = \pm 3.03 \text{ dB}$
- Si $\omega \ll 1/T \rightarrow$ Mòdul = $\pm 20 \cdot \log \sqrt{1} = 0 \text{ dB}$
- Si $\omega \gg 1/T \rightarrow$ Mòdul = $\pm 20 \cdot \log (\omega T)$ Recta de $\pm 20 \text{ dB/dècada}$

La corba de fase logarítmica també variarà segons el valor de la freqüència (ω):

- Si $\omega = 1/T \rightarrow$ Fase = $\pm \tan^{-1} 1 = \pm 45^\circ$
- Si $\omega \ll 1/T \rightarrow$ Fase = $\pm \tan^{-1} 0 = 0^\circ$
- Si $\omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow$ Fase = $\pm \tan^{-1} \infty = \pm 90^\circ$

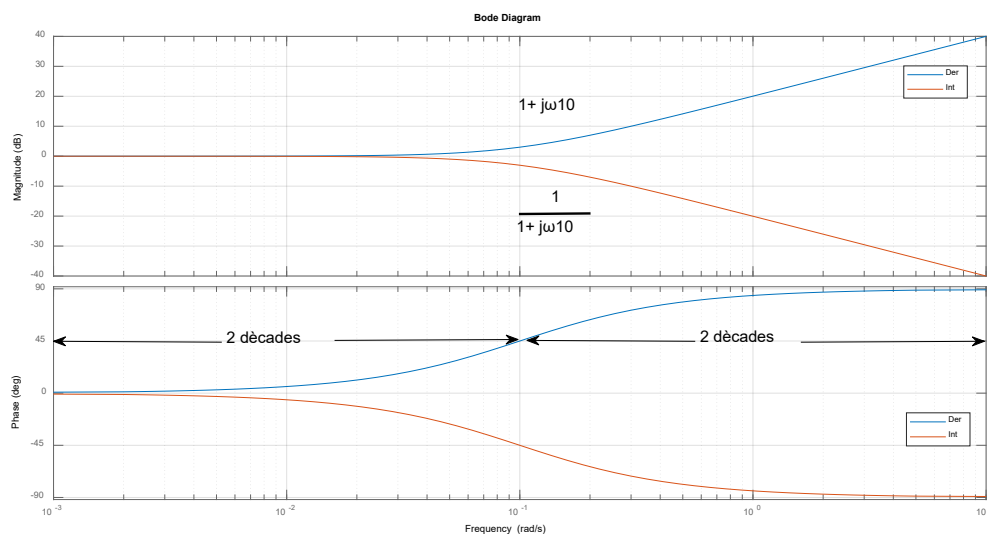


Fig. 45. Diagrama de Bode factors de primer ordre

La freqüència en la qual les dues asímptotes es troben es denomina freqüència cantonada o freqüència de tall (*Cutoff frequency*) i és igual a $\omega_c = 1/T$.

Com en el cas anterior, si la funció de transferència conté un factor de primer ordre derivatiu o integral d'ordre n , es tindrà:

- **Derivador:** $(1 + j\omega T)^n$
- **Integrador:** $\left(\frac{1}{1 + j\omega T}\right)^n$

La corba de magnitud logarítmica variarà segons el valor de la freqüència (ω):

- Si $\omega = 1/T \rightarrow \text{Mòdul} = \pm 20n \cdot \log \sqrt{1 + 1} = \pm 3.03n \text{ dB}$
- Si $\omega \ll 1/T \rightarrow \text{Mòdul} = 0$
- Si $\omega \gg 1/T \rightarrow \text{Mòdul} = \pm 20n \cdot \log(\omega T)$ Recta de $\pm 20n \text{ dB/dècada}$

La corba de fase logarítmica també variarà segons el valor de la freqüència (ω):

- Si $\omega = 1/T \rightarrow \text{Fase} = \pm n \tan^{-1} 1 = \pm n \cdot 45^\circ$
- Si $\omega \ll 1/T \rightarrow \text{Fase} = \pm n \tan^{-1} 0 = 0^\circ$
- Si $\omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow \text{Fase} = \pm n \tan^{-1} \infty = \pm n \cdot 90^\circ$

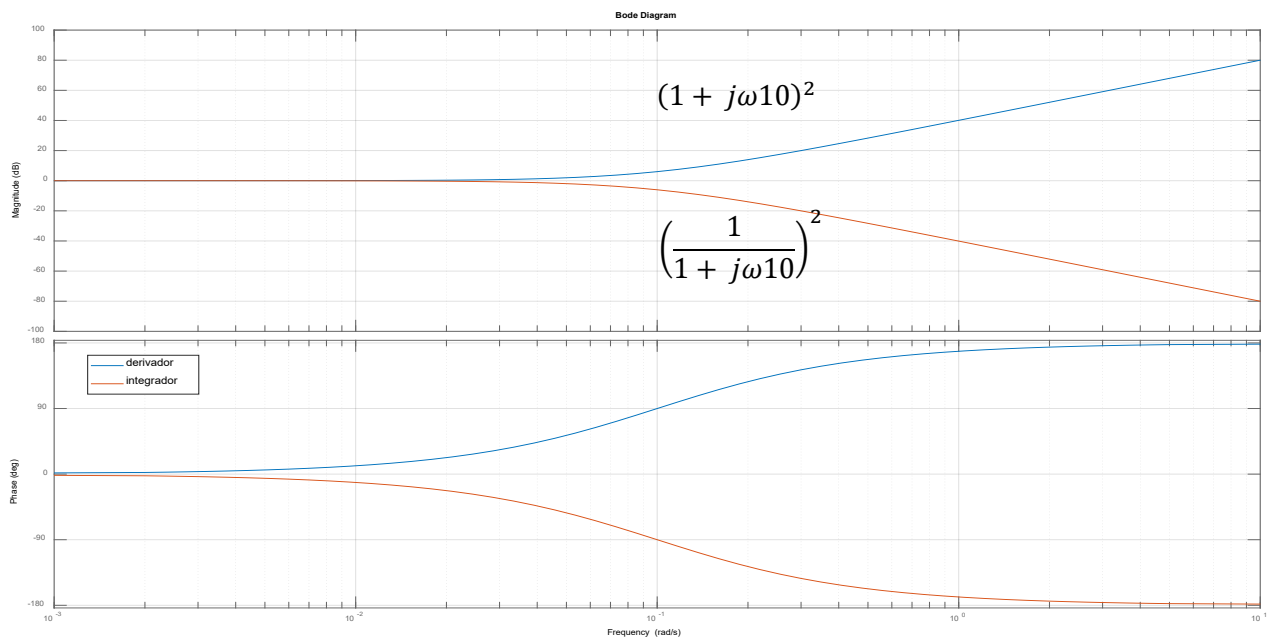


Fig. 46. Factors de primer ordre elevats al quadrat

5.1.2.4. Factors quadràtics $\left[1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{\pm 1}$

En aquest cas la magnitud i la fase del factor quadràtic depenen de la freqüència cantonada i del factor d'amortiment relatiu ξ .

· **Derivador** $\left(1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)$

Mòdul:

$$20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

El comportament de la corba asimptòtica varia segons el valor de la freqüència:

- Freqüència baixa ($\omega \ll \omega_n$): recta de 0 dB/dècada
- Freqüència alta ($\omega \gg \omega_n$): recta de +40 dB/dècada
- Freqüència cantonada ($\omega = \omega_n$): $\omega_c = \omega_n$, punt de tall de les asímptotes d'alta i baixa freqüència

Fase:

$$\tan^{-1} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

- Freqüència baixa ($\omega \ll \omega_n$): 0°
- Freqüència alta ($\omega \gg \omega_n$): 180°
- Freqüència cantonada ($\omega = \omega_n$): 90°

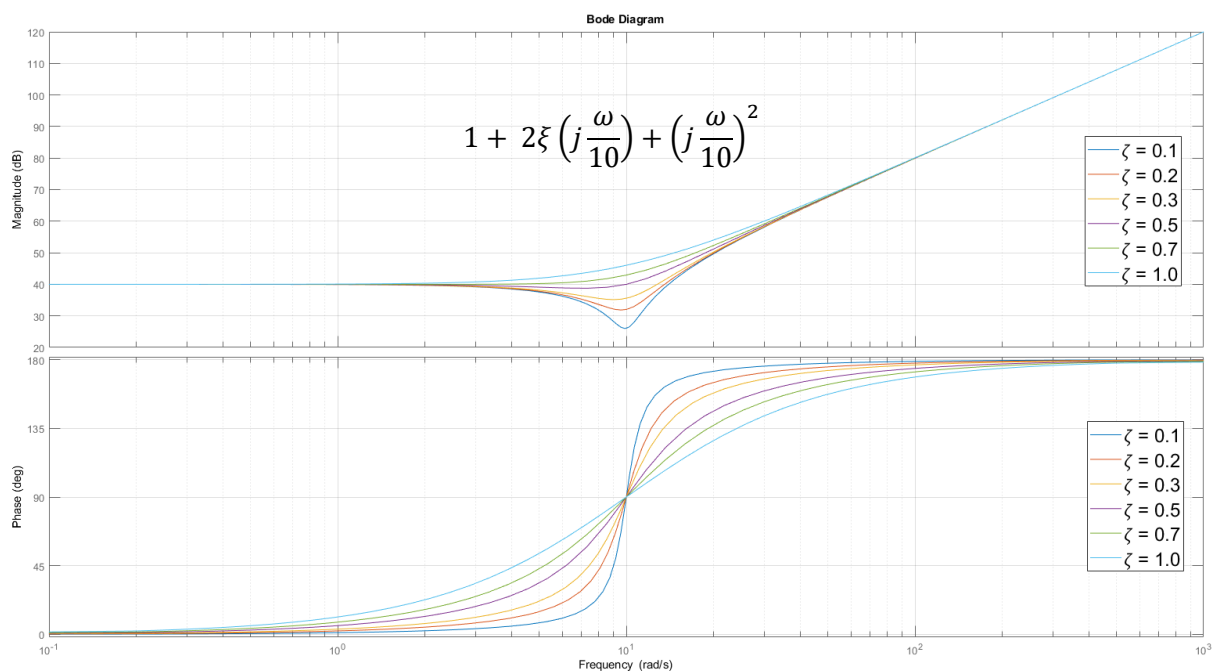


Fig. 47. Corbes de magnitud logarítmica i corbes d'angle de fase de factor quadràtic

- Integrador $(1/1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2)$

Mòdul:

$$-20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

El comportament de la corba asimptòtica varia segons el valor de la freqüència:

- Freqüència baixa ($\omega \ll \omega_n$): recta de 0 dB/dècada
- Freqüència alta ($\omega \gg \omega_n$): recta de -40 dB/dècada
- Freqüència cantonada ($\omega = \omega_n$): $\omega_c = \omega_n$, punt de tall de les asímptotes d'alta i baixa freqüència

Fase:

$$-\tan^{-1} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

- Freqüència baixa ($\omega \ll \omega_n$): 0°
- Freqüència alta ($\omega \gg \omega_n$): -180°
- Freqüència cantonada ($\omega = \omega_n$): -90°

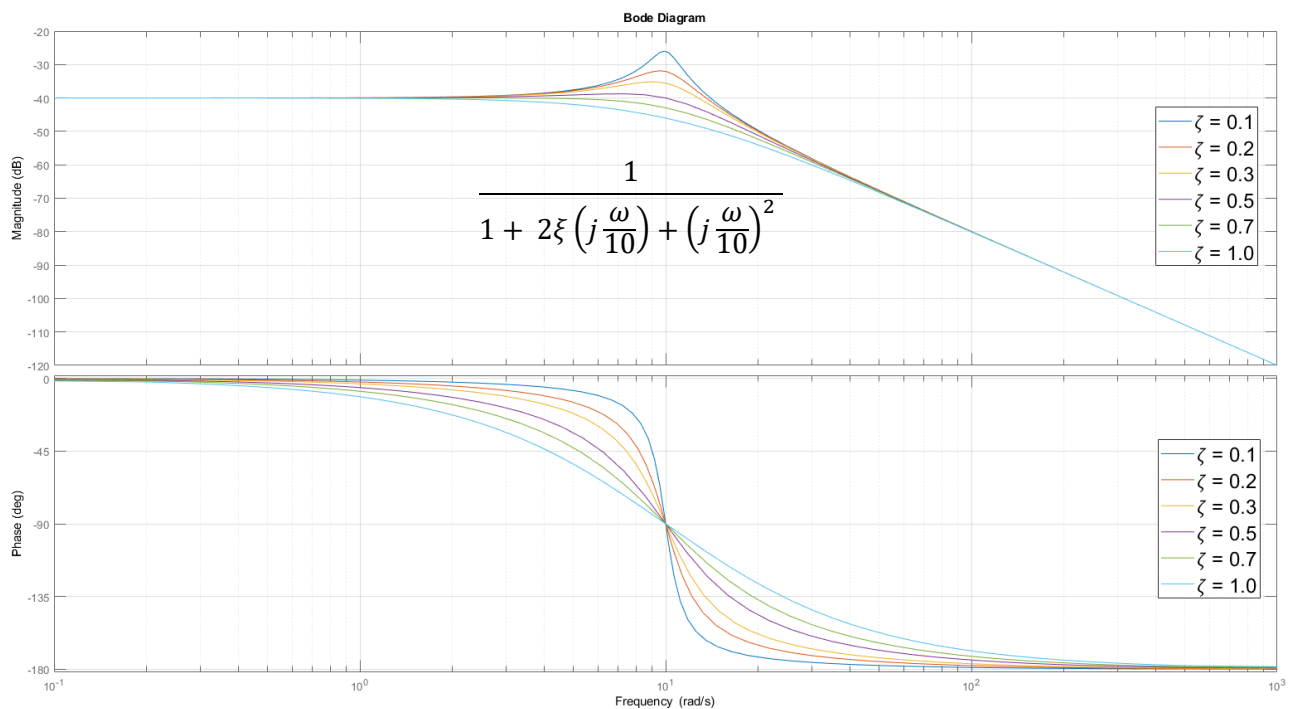


Fig. 48. Corbes de magnitud logarítmica i corbes d'angle de fase de factor quadràtic integrador

5.1.3. Freqüència de ressonància (ω_r)

La magnitud de:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

és:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Si $|G(j\omega)|$ té un valor de sobrepic en alguna freqüència, aquesta es denomina freqüència de ressonància. Com el numerador de $|G(j\omega)|$ és constant, es tindrà un sobrepic quan:

$$g(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

Sigui mínima. Aquesta es pot reescriure com:

$$g(\omega) = \left[\frac{\omega^2 - \omega_n^2(1 - 2\xi^2)}{\omega_n^2}\right]^2 + 4\xi^2(1 - \xi^2)$$

El valor mínim de $g(\omega)$ es produeix en $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ per a $0 \leq \xi \leq 0.707$.

Si $\xi > 0.707$ no hi ha pic de ressonància.

5.1.4. Pic de ressonància (M_r)

La magnitud del pic de ressonància és calcula (M_r) és calcula com:

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \text{ per a } 0 \leq \xi \leq 0.707 \text{ (no està expressat en dB)}$$

O bé:

$$M_r = 1 \rightarrow 20 \log(1) = 0 \text{ dB per a } \xi = 0.707$$

5.1.5. Relació entre el tipus de sistema i la corba de magnitud logarítmica

Considerant un sistema de control amb realimentació unitària:

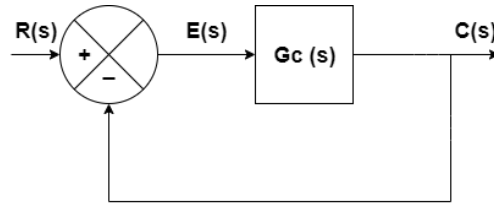


Fig. 49. Sistema de control amb realimentació unitària

Suposant que la funció de transferència en llaç tancat s'obté mitjançant:

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_p s + 1)}$$

O bé:

$$G(j\omega) = \frac{K(T_a j\omega + 1)(T_b j\omega + 1) \cdots (T_m j\omega + 1)}{(j\omega)^N (T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1) \cdots (T_p j\omega + 1)}$$

Es pot afirmar que per a un sistema definit, solament és finita i significativa una de les constants d'error estàtic. Contra major sigui el valor de la constant finita d'error estàtic, més alt és el guany de llaç a mesura que tendeix a zero.

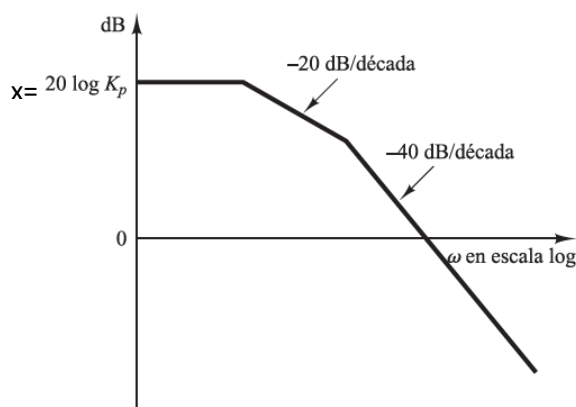
Les constants estàtiques d'error de posició, velocitat i acceleració descriuen el comportament en baixa freqüència dels sistemes de tipus 0, tipus 1 i tipus 2, respectivament.

El tipus del sistema determina el pendent de la corba de magnitud logarítmica a baixes freqüències. Per tant, la informació relacionada amb la existència i la magnitud de l'error en estat estacionari d'un sistema davant d'una entrada definida, es determina a partir de l'observació de baixa freqüència de la corba de magnitud logarítmica.

5.1.5.1. Determinació de les constants d'error estàtic de posició

Considerant el sistema de controls $G(s)$ amb realimentació unitària de tipus 0.

En aquest cas, l'asíptota a baixa freqüència, línia horitzontal, determina el valor de la constant estàtica d'error de posició (K_p).



$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = K = K_p$$

$$20 \cdot \log_{10}(K_p) = x$$

$$\log_{10}(K_p) = \frac{x}{20}$$

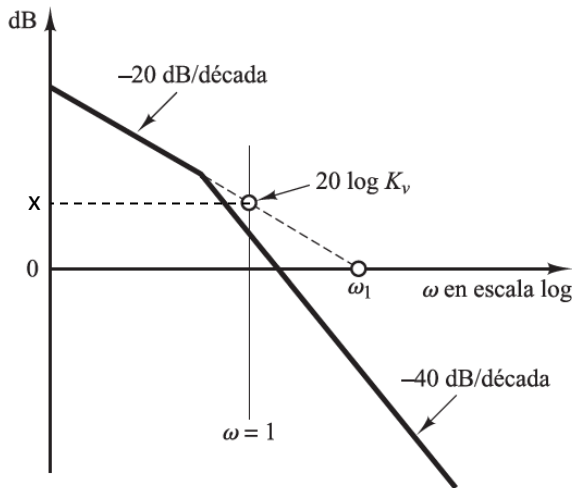
$$K_p = 10^{\frac{x}{20}}$$

Fig. 50. Corba de magnitud logarítmica d'un sistema de tipus 0

5.1.5.2. Determinació de les constants d'error estàtic de velocitat

Considerant el sistema de controls $G(s)$ amb realimentació unitària de tipus 1.

En aquest cas, la intersecció del segment inicial -20 dB/dècada (o la seva extensió) amb la línia $\omega = 1$, determina el valor de l'error estàtic de velocitat (K_v).



En aquest cas, tenim dues opcions per determinar el valor de K_v :

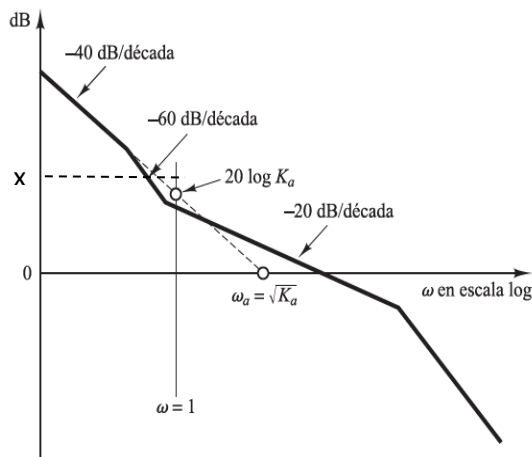
$$\begin{aligned} a. \quad & K_v = \omega_1 \\ b. \quad & 20 \cdot \log \left| \frac{K_v}{j\omega} \right|_{\omega=1} = 20 \cdot \log K_v \\ & 20 \cdot \log_{10}(K_v) = x \\ & \log_{10}(K_v) = \frac{x}{20} \\ & K_v = 10^{\frac{x}{20}} \end{aligned}$$

Fig. 51. Corba de magnitud logarítmica d'un sistema de tipus 1

5.1.5.3. Determinació de les constants d'error estàtic d'acceleració

Considerant el sistema de controls $G(s)$ amb realimentació unitària de tipus 2.

En aquest cas, la intersecció del segment inicial -40 dB/dècada (o la seva extensió) amb la línia $\omega = 1$, determina el valor de l'error estàtic d'acceleració (K_a).



En aquest cas, tenim dues opcions per determinar el valor de K_a :

$$\begin{aligned} a. \quad & \omega_a = \sqrt{K_a} \\ b. \quad & 20 \cdot \log \left| \frac{K_a}{(j\omega)^2} \right|_{\omega=1} = 20 \cdot \log K_a \\ & 20 \cdot \log_{10}(K_a) = x \\ & \log_{10}(K_a) = \frac{x}{20} \\ & K_a = 10^{\frac{x}{20}} \end{aligned}$$

Fig. 52. Corba de magnitud logarítmica d'un sistema de tipus 2

5.2. Diagrames de Nyquist

El *diagrama de Nyquist* o diagrama polar d'una funció de transferència sinusoidal $G(j\omega)$ és una gràfica de la magnitud de $G(j\omega)$ amb respecte de l'angle de fase de $G(j\omega)$ en coordenades polars, quan ω varià de 0 a infinit. En altres paraules, el diagrama polar és el lloc geomètric dels vectors $|G(j\omega)|\angle G(j\omega)$ quan ω varià de zero a infinit. Cada punt en el diagrama polar de $G(j\omega)$ representa el punt terminal d'un vector en un valor determinat de ω .

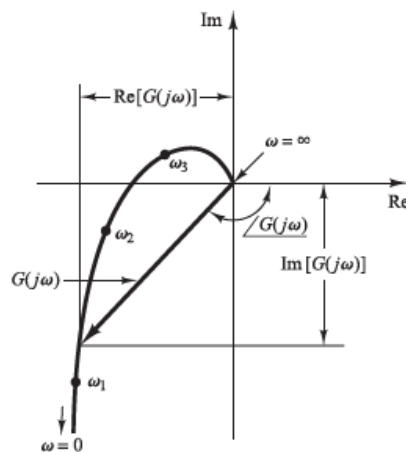


Fig. 53. Diagrama de Nyquist

Un avantatge d'utilitzar un diagrama polar és que aquest representa en una sola gràfica les característiques de la resposta en freqüència d'un sistema en un rang de freqüència complet. Per l'altra part, un desavantatge és que el diagrama no indica de forma clara la contribució de tots els factors individuals de la funció de transferència en llaç obert.

5.2.1. Factors derivatiu i integral $(j\omega)^{\pm 1}$

El diagrama polar de $G(j\omega) = j\omega$ és l'eix imaginari positiu.

$$G(j\omega) = j\omega = \omega \angle 90^\circ$$

El diagrama polar de $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ és l'eix imaginari negatiu.

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$$

5.2.2. Factors de primer ordre $(1 + j\omega T)^{\pm 1}$

Per a la funció de transferència sinusoidal:

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T = \sqrt{1 + (\omega T)^2} \angle \tan^{-1} \omega T$$

Els valors de $G(j\omega)$ en $\omega = 0$ i $\omega = 1/T$ són respectivament:

$$G(j0) = 1 \angle 0^\circ \text{ i } G\left(j \frac{1}{T}\right) = \sqrt{2} \angle 45^\circ$$

Si ω tendeix a infinit, la magnitud de $G(j\omega)$ tendeix a zero i l'angle de fase tendeix a 90° . El diagrama polar d'aquesta funció de transferència és un semicercle quan la freqüència ω varia de zero a l'infinit. El centre es localitza en 0.5 sobre l'eix real i el radi és igual a 0.5.

El diagrama polar de la funció de transferència $1/(1 + j\omega T)$ és simplement la meitat inferior de la recta que passa pel punt (1,0) en el pla complex i paral·lel a l'eix imaginari, com és pot observar en la següent figura.

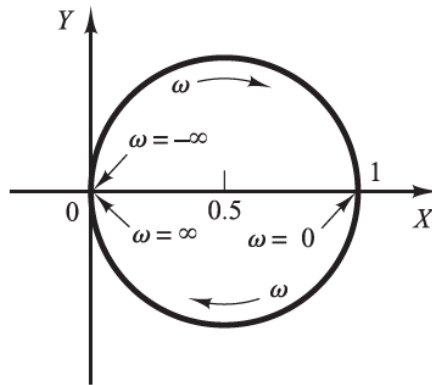


Fig. 54. Diagrama de Nyquist factor de primer ordre

5.2.3. Factors quadràtics $\left[1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{\pm 1}$

En aquest cas, les parts de baixa i alta freqüència del diagrama polar de la funció de transferència sinusoidal:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2} \text{ per a } \xi > 0$$

S'obté, respectivament, mitjançant:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ \text{ i } \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \angle -180^\circ$$

Conforme ω augmenta de zero a infinit. Per tant, la part d'alta freqüència de $G(j\omega)$ és tangent a l'eix real negatiu.

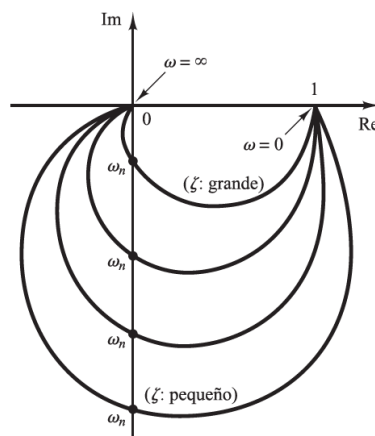


Fig. 55. Diagrama de Nyquist factor quadràtic integrador

Com es pot observar, la forma exacta del diagrama de Nyquist depèn del valor del factor d'amortiment relatiu ξ , però la forma general del diagrama és igual tant pel cas subesmorteït $0 < \xi < 1$ com per el sobre esmorteït ($\xi > 1$). En el cas sobre esmorteït, quan ξ augmenta més enllà de la unitat, el lloc geomètric $G(j\omega)$ tendeix a un semicercle. El sistema es comporta com un sistema de primer ordre.

Pel cas sobre esmorteït en $\omega = \omega_n$, és té que $|G(j\omega_n)| = 1/j2\xi$ i $\angle G(j\omega_n) = -90^\circ$. Per tant, s'observa que la freqüència en la que el lloc geomètric $G(j\omega_n)$ talla l'eix imaginari és la freqüència natural no amortida ω_n . En el *diagrama de Nyquist*, el punt de freqüència més allunyat de l'origen, correspon a la freqüència de ressonància ω_r . El valor pic de $G(j\omega)$ s'obté com el quocient entre la magnitud del vector en la freqüència de ressonància ω_r , i la magnitud del vector en $\omega = 0$.

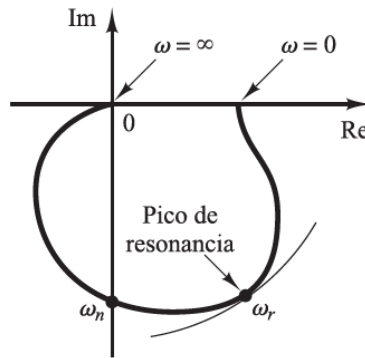


Fig. 56. Pic i freqüència de ressonància

Per l'altra banda, en el cas del derivador, amb la següent funció de transferència sinusoidal:

$$G(j\omega) = 1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 \text{ per a } \xi > 0$$

Que es pot simplificar com:

$$G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n}$$

La part de baixa freqüència de la corba és:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ$$

I la part d'alta freqüència és:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \infty \angle 180^\circ$$

Degut a que la part imaginària de $G(j\omega)$ es positiva per a $\omega > 0$ i augmenta de manera monòtona, a més que la part real de $G(j\omega)$ disminueix de forma monòtona a partir de la unitat, la forma general del diagrama polar de $G(j\omega)$ és la que apareix en la següent figura. L'angle de fase està entre 0° i 180° .

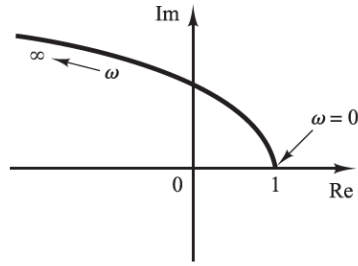


Fig. 57. Diagrama de Nyquist factor quadràtic derivador

5.2.4. Formes generals dels diagrames polars

Els diagrames polars d'una funció de transferència de la forma:

$$G(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_b) \cdots}{(j\omega)^2(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \cdots}$$

On el grau del polinomi del denominador és major que el del numerador, sistema causal, tindran les següents formes generals, depenent del tipus del sistema:

- Tipus 0.** El punt inicial del *diagrama de Nyquist* (que correspon a $\omega = 0$) és finit i està sobre l'eix real positiu. La tangent en el diagrama polar en $\omega = 0$ és perpendicular a l'eix real. El punt terminal, que correspon a $\omega = \infty$, està en l'origen, i la corba és tangent a un dels eixos.
- Tipus 1.** El terme $j\omega$ del denominador contribueix amb -90° a l'angle de fase total de $G(j\omega)$ per a $0 \leq \omega \leq \infty$. En $\omega = 0$, la magnitud de $G(j\omega)$ és finita i l'angle de fase es converteix en -90° . En baixes freqüències, el diagrama polar és asimptòtic cap a una línia paral·lela a l'eix imaginari negatiu. En $\omega = \infty$, la magnitud es torna zero i la corba convergeix cap a l'origen i és tangent a un dels eixos.
- Tipus 2.** El terme $(j\omega)^2$ del denominador contribueix amb -180° a l'angle de fase total de $G(j\omega)$ per a $0 \leq \omega \leq \infty$. En $\omega = 0$, la magnitud de $G(j\omega)$ és infinita i l'angle de fase es converteix en -180° . En baixes freqüències, el diagrama polar és asimptòtic cap a una línia paral·lela a l'eix real negatiu. En $\omega = \infty$, la magnitud es torna zero i la corba convergeix cap a l'origen i és tangent a un dels eixos.

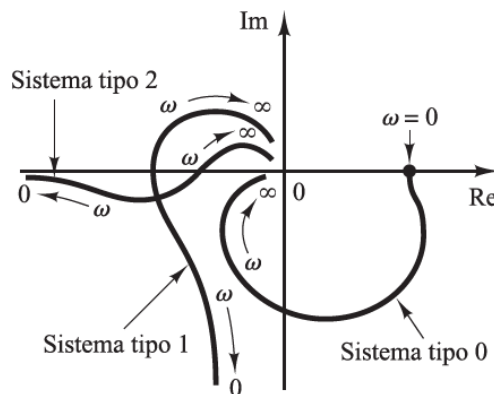
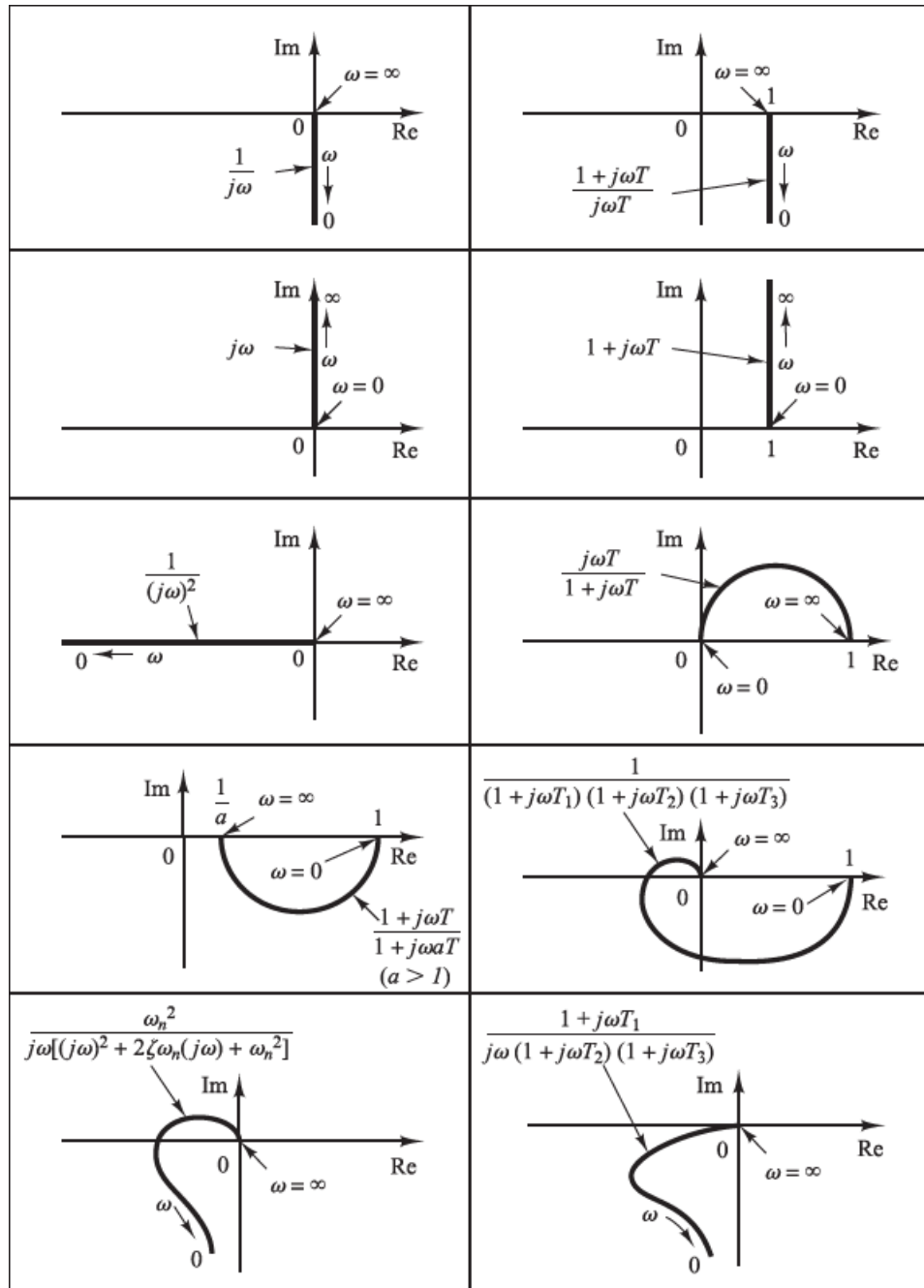


Fig. 58. Diagrama de Nyquist de sistemes de tipus 0, tipus 1 i tipus 2.

El programa *Matlab* ofereix funcions per representar de manera senzilla el *diagrama de Nyquist* de qualsevol sistema de control lineal, invariant en el temps i realimentat amb la funció **nyquist(sys)**.

La *Taula 1* mostra gràfiques dels diagrames polars de varies funcions de transferència senzilles.



Taula 15. Diagrames polars de funcions de transferència senzilles

5.3. Anàlisi d'estabilitat

En el següent apartat, es presentaran diversos exemples d'anàlisi d'estabilitat dels sistemes de control mitjançant el *criteri d'estabilitat de Nyquist* i l'anàlisi d'estabilitat relativa amb la introducció del marge de guany i el marge de fase.

5.3.1. Criteri d'estabilitat de Nyquist

El *criteri d'estabilitat de Nyquist* determina l'estabilitat d'un sistema enllaç tancat a partir de la resposta en freqüència enllaç obert i els pols enllaç obert.

Considerant el sistema enllaç obert de la Fig. 59. La funció de transferència enllaç tancat és:

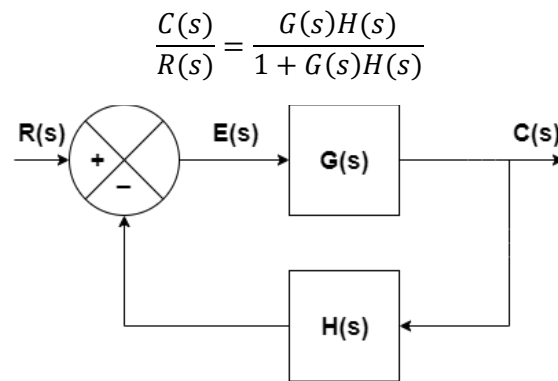


Fig. 59. Sistema enllaç tancat

Per assegurar l'estabilitat, totes les arrels de l'equació característica:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

Deuen ser en el semiplà esquerre del pla s .

El *criteri d'estabilitat de Nyquist* relaciona la resposta en freqüència enllaç obert $G(j\omega)H(j\omega)$ amb el nombre de zeros i pols de l'equació característica que es troben al semiplà dret del pla s . Aquest, és útil ja que permet determinar gràficament l'estabilitat absoluta del sistema enllaç tancat a partir de les corbes de resposta en freqüència enllaç obert, sense que sigui necessari determinar els pols enllaç tancat.

El *criteri d'estabilitat de Nyquist* es basa en un teorema de la teoria de la variable complexa. Per a entendre'l, s'analitza primer la transformació dels contorns en el pla complex.

Es suposa que la funció de transferència enllaç obert $G(s)H(s)$ es representa com un quocient de polinomis en s . Per a un sistema *causal*, físicament realitzable, el grau del polinomi del denominador de la funció de transferència enllaç tancat ha de ser major o igual que el del polinomi del numerador. Això significa que el límit de $G(s)H(s)$, quan s tendeix a infinit, és zero o una constant per a qualsevol sistema que pugui materialitzar-se físicament.

L'equació característica del sistema de la Fig.59 és:

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

Amb aquest criteri és demostrat que per a una trajectòria tancada i contínua en el pla s , contorn, que no passa per ningun punt singular, pol o zero, li correspon una corba tancada en el pla $F(s)$. El nombre i la direcció de les voltes en el punt $-1 + 0j$ del pla $F(s)$ per a la corba tancada es relacionarà amb l'estabilitat del sistema.

Suposant que el punt representatiu s segueix un contorn en el pla s en sentit horari, la direcció de la volta en el punt $-1 + 0j$, depèn de si el contorn en el pla s tanca un pol o un zero. Per tant, tindrem els casos següents:

- Tanca un pol.** El lloc geomètric de $F(s)$ rodejarà un cop el punt $-1 + 0j$ en sentit antihorari.
- Tanca un zero.** El lloc geomètric de $F(s)$ rodejarà un cop el punt $-1 + 0j$ en el sentit horari.
- Tanca igual nombre de pols que de zeros.** La corba tancada corresponent en el pla $F(s)$ no envoltarà el punt $-1 + 0j$.

La localització d'un pol o un zero en el pla s , ja sigui en el semiplà dret o en el semiplà esquerre, no produeix cap diferència.

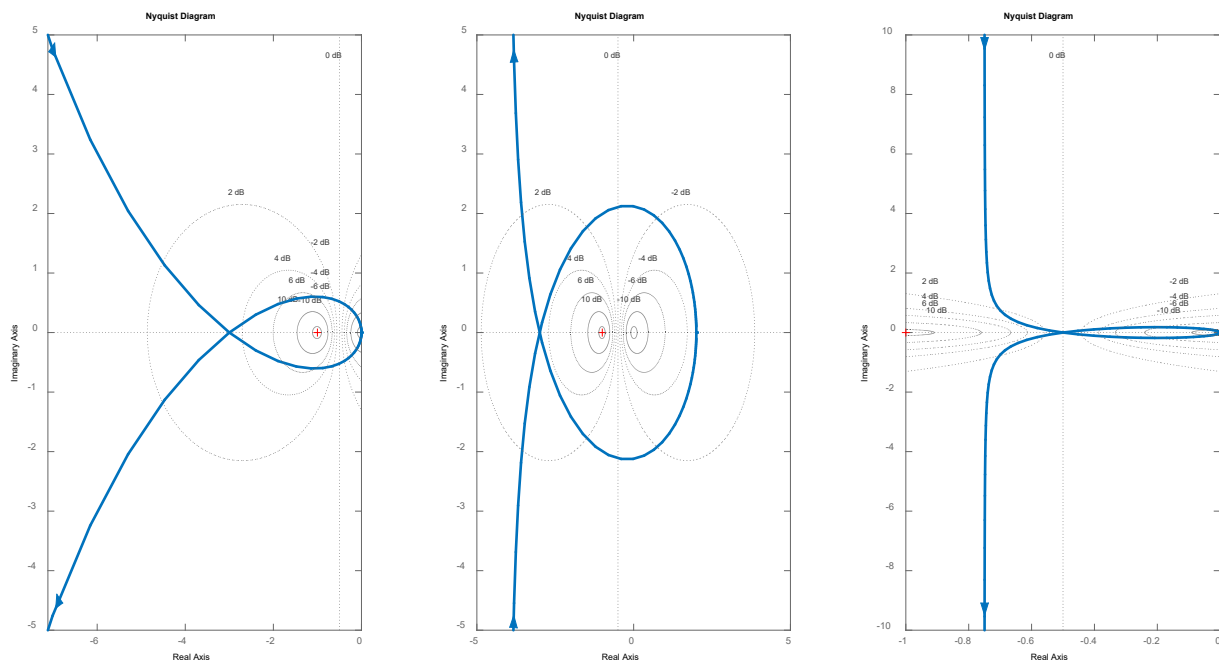


Fig. 60. Diagrames de Nyquist de corbes tancades en el pla $F(s)$ quan el contorn en el pla s tanca: un pol (esquerra), un zero (centre) o el mateix nombre de pols que de zeros (dreta)

Suposant que $F(s)$ és el quocient de dos polinomis en s , que P és el nombre de pols i Z el nombre de zeros de $F(s)$ que es troben en un cert contorn tancat en el pla s , considerada una multiplicitat de pols i zeros. Suposant per últim, que aquest contorn és tal que no passa a través de cap pol ni zero de $F(s)$. Aquest contorn tancat en el pla s es transforma després dintre del pla $F(s)$ com una corba tancada. El número total de N voltes en el punt $-1 + 0j$ del pla $F(s)$ en el sentit horari, conforme un punt representatiu s traça el contorn complet en el sentit horari en el pla s , és igual a $Z - P$. D'aquesta manera podem trobar la diferència entre el nombre de zeros i de pols, com:

$$Z = N + P$$

On:

- **Z**. Nombre de zeros de $1 + G(s)H(s)$ en el semiplà dret del pla s .
- **N**. Nombre de voltes en el sentit horari entorn el punt $-1 + 0j$.
- **P**. Nombre de pols de $G(s)H(s)$ en el semiplà dret del pla s .

Per analitzar l'estabilitat dels sistemes de control lineals, es suposa que el contorn tancat en el pla s tanca tot el semiplà dret d'aquest. El contorn està format per l'eix $j\omega$ complet des de $\omega = -\infty$ a $+\infty$, i una trajectòria semicircular de radi infinit en el semiplà dret del pla s que es forma seguint el sentit horari. Aquest contorn es coneix com *trajectòria de Nyquist*. Aquesta tanca el semiplà dret així com tots els zeros i pols de $1 + G(s)H(s)$ que tenen part real positiva. Si no hi ha zeros de $1 + G(s)H(s)$ en el semiplà dret del pla s , no hi ha pols en llaç tancat i el sistema és estable. És important que la *trajectòria de Nyquist* no passi per cap zero ni pol de $1 + G(s)H(s)$. Si $G(s)H(s)$ té un o més pols en l'origen del pla s , la transformació del punt $s = 0$ es torna indeterminada. En aquests casos, s'evita passar per l'origen mitjançant una desviació.

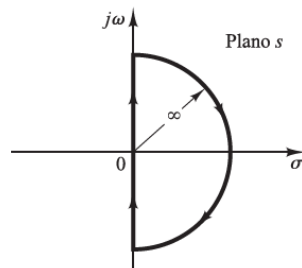


Fig. 61. Trajectòria de Nyquist

Rodejar el punt $-1 + 0j$ sol succeir mentre un punt representatiu s es mou de $-j\infty$ a $+j\infty$ al llarg de l'eix $j\omega$, sempre i quan no es trobin zeros ni pols sobre l'eix $j\omega$.

L'estabilitat del sistema en llaç tancat s'esbrina examinant totes les voltes en el punt $-1 + 0j$ mitjançant el lloc geomètric de $G(j\omega)H(j\omega)$. El nombre de voltes en sentit horari en aquest punt, es troba simplement comptant el nombre de rotacions en sentit horari.

És senzill dibuixar $G(j\omega)H(j\omega)$ per a la *trajectòria de Nyquist*. La transformació de l'eix $j\omega$ negatiu és la imatge reflectida de la transformació de l'eix $j\omega$ positiu respecte l'eix real. El semicercle amb radi infinit es transforma en l'origen del pla GH , en el cas que el grau del denominador sigui superior al del numerador, o en un punt de l'eix real del pla GH , en el cas que el grau del numerador i el denominador siguin iguals.

Si la *trajectòria de Nyquist* en el pla s tanca Z zeros i P pols de $1 + G(s)H(s)$ i no passa pels pols ni zeros de $1 + G(s)H(s)$ conforme un punt representatiu s és mou en el sentit horari al llarg de la *trajectòria de Nyquist*, el contorn corresponent en el pla $G(s)H(s)$ rodeja en un cercle $N = Z - P$ vegades el punt $-1 + 0j$ en el sentit horari. Els valors negatius de N impliquen sentit antihorari en les voltes.

A l'examinar l'estabilitat dels sistemes de control lineals mitjançant el *criteri d'estabilitat de Nyquist*, s'observa que es poden presentar tres casos:

- El punt $-1 + 0j$ no es troba rodejat.** Això implica que el sistema és estable si no hi ha pols $G(s)H(s)$ en el semiplà dret del pla s ; de lo contrari, el sistema és inestable.
- El punt $-1 + 0j$ queda rodejat una o varies vegades en sentit antihorari.** En aquest cas, el sistema és estable si el nombre de voltes en sentit antihorari és igual al nombre de pols $G(s)H(s)$ en el semiplà dret del pla s ; de lo contrari, el sistema és inestable.
- El punt $-1 + 0j$ queda rodejat una o varies vegades en sentit horari.** En aquest cas el sistema és inestable.

5.3.2. Sistema condicionalment estable

Un sistema condicionalment estable és estable per un valor de guany en llaç obert que es troba entre valors crítics, i és inestable si el guany en llaç obert s'incrementa o disminueix lo suficient.

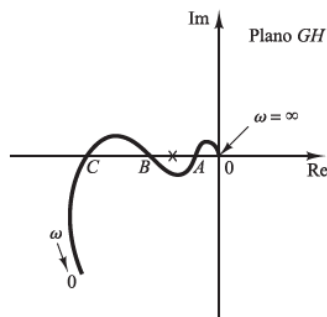


Fig. 62. Sistema condicionalment estable.

5.3.3. Anàlisi d'estabilitat relativa

Al dissenyar un sistema de control, és necessari que sigui estable i que aquest presenti una estabilitat relativa adequada.

En l'anàlisi següent és suposarà que els sistemes considerats tenen realimentació unitària i que són de fase mínima, funció de transferència en llaç obert no té pols ni zeros en el semiplà dret del pla s .

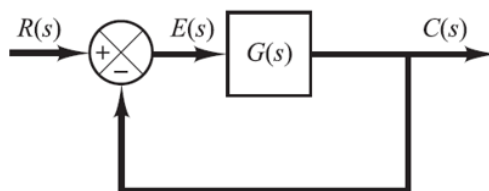


Fig. 63. Sistema genèric realimentació unitària.

5.3.3.1. Marges de fase i de guany

Sigui $G(s)$ la funció de transferència d'un sistema enllaç obert, és defineix:

- **Freqüència de creuament de guany** (ω_{CG}). Freqüència en la qual el mòdul de $G(j\omega) = 1$ (0 dB)
- **Freqüència de creuament de fase** (ω_{CF}). Freqüència en la qual la fase de $G(j\omega) = -180^\circ$

És comú representar el marge d'estabilitat d'un sistema mitjançant el marge de fase i de guany:

- **Marge de fase (γ)**. Quantitat de fase addicional en ω_{CG} per a portar el sistema a la vora de la inestabilitat (arribar a -180°).

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(\omega_{CG})$$

- **Marge de guany (K_g)**. Quantitat de guany addicional en ω_{CF} per a portar el sistema a la vora de la inestabilitat (arribar a 0 dB).

$$K_g = \frac{1}{|G(\omega_{CF})|}$$

$$K_g(\text{dB}) = -20 \cdot \log|G(\omega_{CF})|$$

Per a que un sistema de fase mínima sigui estable, el marge de fase (γ) i el marge de guany (K_g) han de ser positius.

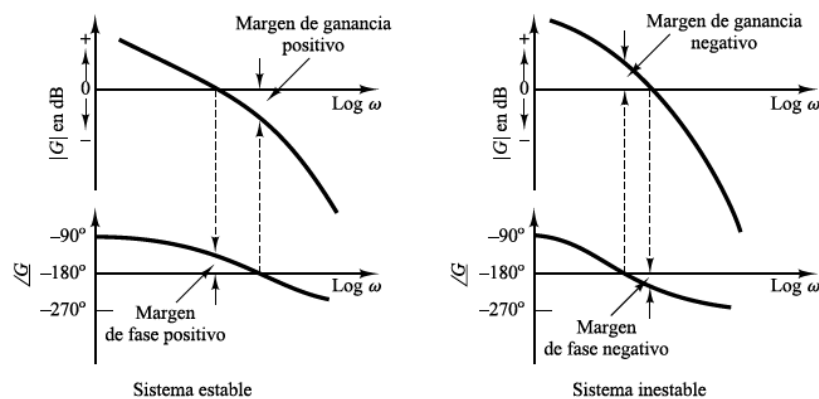


Fig. 64. Marges de fase i de guany en el diagrama de Bode.

També és pot diferenciar els marges de fase i de guany en el *diagrama de Nyquist*. En aquest cas, mitjançant la proximitat del lloc geomètric $G(j\omega)$ al punt $-1 + 0j$.

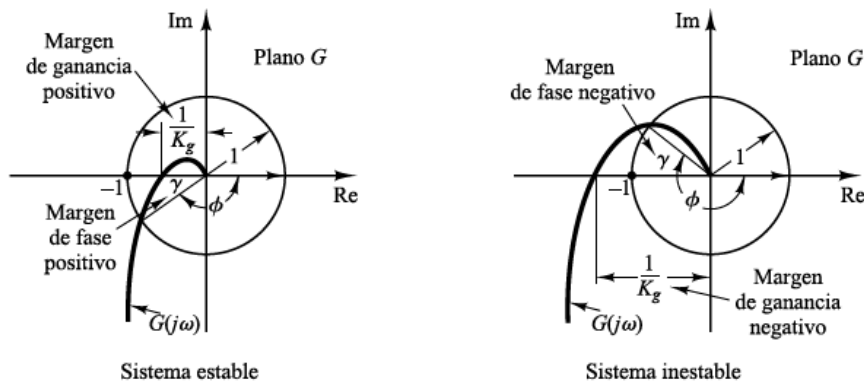


Fig. 65. Marges de fase i de guany en el diagrama de Nyquist.

Per a un sistema estable, K_g indica quan pot incrementar-se el guany abans de que el sistema es torni inestable. En el cas contrari, per un sistema inestable, ens indicarà quant es deu disminuir el guany per a que el sistema es torni estable.

Per a obtenir un rendiment satisfactori, es recomana que el marge de fase es trobi entre 30° i 60° ; i que el marge de guany sigui major que 6 dB .

Amb aquests valors, un sistema de fase mínima té una estabilitat garantida, tot i que el guany en llaç obert i les constants de temps de les components variïn un cert grau.

En la major part dels casos pràctics:

- És convenient per a l'estabilitat una pendent de -20 dB/dècada en ω_{CG} .
- Amb una pendent de -40 dB/dècada en ω_{CG} , el sistema pot ser estable o inestable. En el cas de que sigui estable, el marge de fase serà petit.
- Amb una pendent de -60 dB/dècada o major en ω_{CG} , és molt probable que el sistema sigui inestable.

Per a sistemes de fase no mínima, la millor forma de determinar l'estabilitat és utilitzar el *diagrama de Nyquist* en lloc del *diagrama de Bode*.

Per a obtenir els marges i freqüències dels marges de fase i de guany d'una manera senzilla, *Matlab* ofereix la funció *margin()*. Per tal d'implementar-la adequadament, es recomana:

$$[Gm, Pm, wcp, wcg] = \text{margin}(sys)$$

On:

- **Gm.** Marge de guany.
- **Pm.** Marge de fase.
- **wcp.** freqüència de creuament de fase.
- **wcg.** freqüència de creuament de guany.

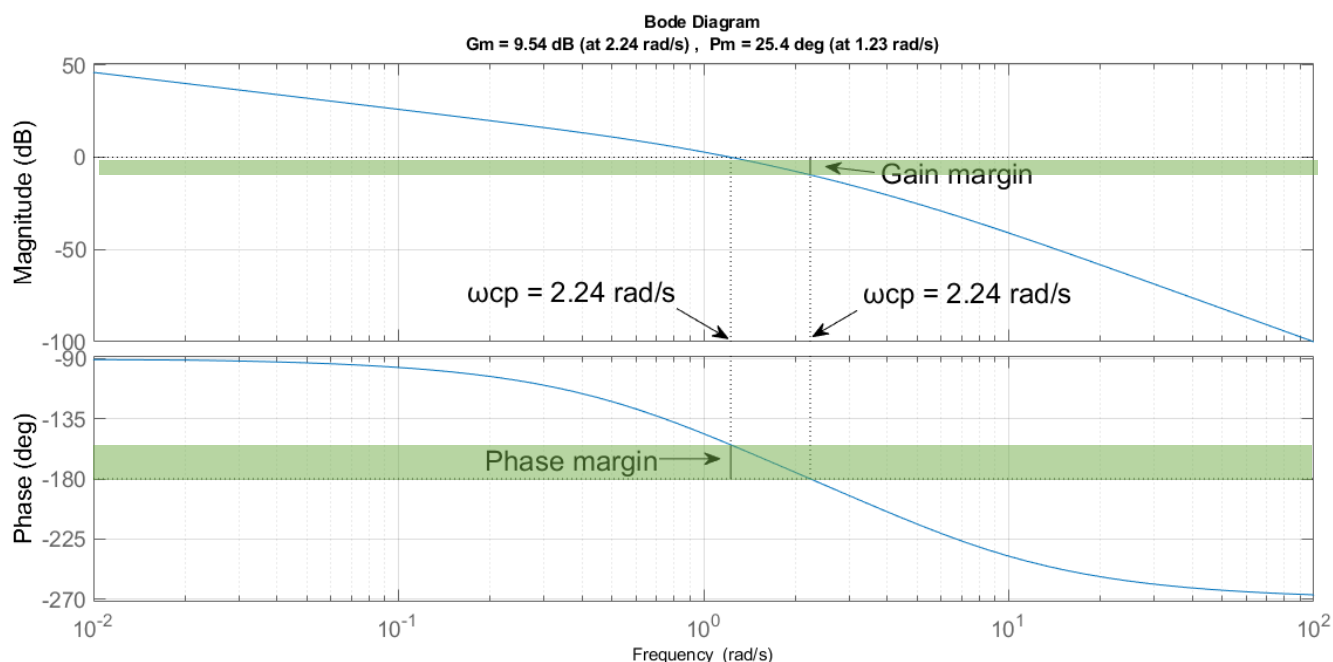


Fig. 66. Exemple gràfica funció $\text{margin}(\text{sys})$

Hi ha sistemes de control en els que la fase no creuarà la línia de -180° . En aquest cas, el marge de guany (K_g) és $\pm\infty$. També és pot donar el cas de que la magnitud no creui la línia de 0 dB, el marge de fase (γ) en aquest cas serà $\pm\infty$.

5.3.4. Marge de disc

En aquest apartat és presentarà una nova eina per avaluar la estabilitat robusta d'un sistema amb realimentació. Aquesta s'anomena *disk margin* o marge de disc, i en certa manera, s'encarrega de fixar les limitacions dels marges clàssics.

Els marges clàssics d'estabilitat, marges de fase i de guany, tractats en l'anterior apartat, sol tenien en compte perturbacions de guany o de fase per separat, per tant, no contemplaven un anàlisi en funció de perturbacions de guany i de fase simultànies. Aquest fet comporta que petites perturbacions de guany i de fase simultànies, puguin causar problemes de robustesa, encara que el sistema tingui grans marges de fase i de guany, segons els marges clàssics.

Gràficament, a partir del *diagrama de Nyquist*, és pot comprovar que encara que els marges de guany i de fase siguin grans, la *trajectòria de Nyquist* es pot trobar molt propera al punt -1 .

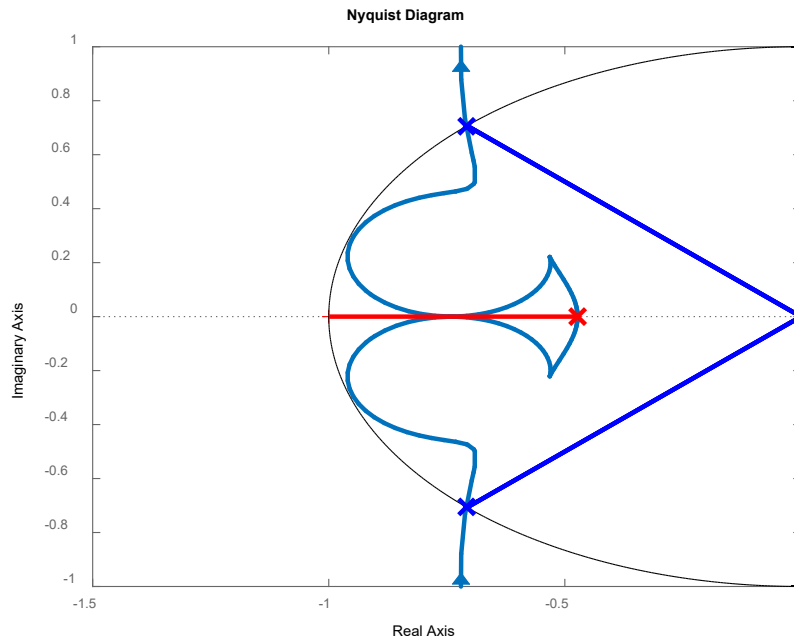


Fig. 67. Gràfica de Nyquist d'un sistema poc robust amb grans marges clàssics (guany i fase)

Els marges de disc estan definits utilitzant una família general de perturbacions complexes les quals tenen en compte simultànies variacions de guany i de fase. Cada conjunt de perturbacions, denominades com $D(\alpha, \sigma)$, és un disc parametritzat per a una mida α i una desviació σ del punt nominal $f = 1$. Donada una desviació σ , el marge de disc és la major mida α per la qual el sistema enllaç tancat roman estable per totes les perturbacions en $D(\alpha, \sigma)$.

Les variacions de guany i de fase es modelen naturalment com un factor multiplicatiu de valor complex f que actua sobre el llaç obert produint un factor pertorbat $G_{OL}(s) = f \cdot G(s)$. Aquest factor és nominalment 1 i la seva màxima desviació de $f = 1$ quantifica la quantitat de guany i la variació de fase.

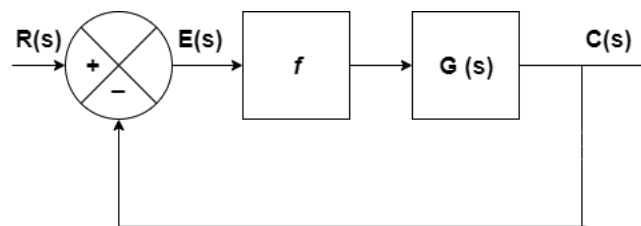


Fig. 68. Esquema general sistema amb realimentació unitària amb factor de pertorbació.

Definit un marge de disc $D(\alpha, \sigma)$, el valor nominal $f = 1$ no es troba necessàriament en el centre del disc c . Els punts d'intercepció amb l'eix real $\gamma_{m\grave{a}x}$ i $\gamma_{m\grave{m}n}$ determinen l'augment i la disminució relativa del guany. La línia que passa per l'origen i és tangent al disc, determina la màxima fase de variació $\phi_{m\grave{a}x}$ aconseguida per qualsevol pertorbació delimitada dins de $D(\alpha, \sigma)$.

Analíticament, aquests punts es poden calcular com:

$$\gamma_{m\grave{m}n} = \frac{2 - \alpha(1 - \sigma)}{2 + \alpha(1 + \sigma)} \text{ i } \gamma_{m\grave{a}x} = \frac{2 + \alpha(1 - \sigma)}{2 - \alpha(1 + \sigma)}$$

El centre del disc i el radi es poden calcular com:

$$c = \frac{1}{2}(\gamma_{\min} + \gamma_{\max}) \text{ i } r = \frac{1}{2}(\gamma_{\max} - \gamma_{\min})$$

La màxima variació de fase satisfà $\sin \phi_{\max} = \frac{r}{c}$ quan $r \leq c$. Per lo contrari, si $r > c$, llavors $D(\alpha, \sigma)$ conté el origen, per tant, $\phi_{\max} = +\infty$.

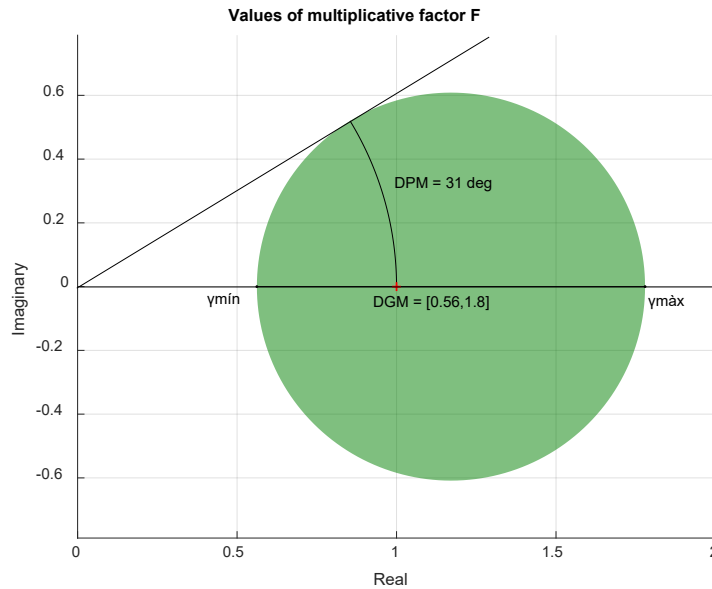


Fig. 69. Conjunt de variacions $D(\alpha, \sigma)$ d'un sistema genèric

És de gran ajuda establir α com un controlador de la quantitat de variació de guany i de fase, i σ amb l'augment i la disminució relativa del guany.

Segons el valor de la desviació σ , es poden diferenciar tres casos diferents:

- **Cas balancejat ($\sigma = 0$).** Per aquest cas, es té $\gamma_{\max} = 1/\gamma_{\min}$. El màxim guany d'augment i de disminució són els mateixos en termes generals.
- **$\sigma > 0$.** En aquest cas, el disc és mou cap a la dreta i α s'ajusta per mantindre el radi constant. En termes de guany, això significa que la variació de guany pot augmentar per a un factor més gran del que pot disminuir.
- **$\sigma < 0$.** En aquest cas, el disc és mou cap a l'esquerra. En termes de guany, significa que el guany pot disminuir per a un factor més gran del que pot augmentar, fins i tot pot canviar el signe.

Resumint, un valor no nul de la desviació indica un biaix, en una escala logarítmica, cap a la disminució de guany ($\sigma < 0$) o un augment de guany ($\sigma > 0$).

Per a un valor fixat de σ , el paràmetre $\alpha > 0$ controla la dimensió de la regió $D(\alpha, \sigma)$. La mida del disc augmenta amb valors més grans de α .

5.3.4.1. Relació amb els marges de guany i de fase

Els marges de disc estan relacionats amb la noció clàssica dels marges de guany i de fase però proporcionen una avaluació més completa de l'estabilitat robusta. Com ja s'ha esmentat en anteriors apartats, el marc de treball del marge de disc modela les variacions de guany i de fase com un factor multiplicatiu f prenent valors dins del conjunt $D(\alpha, \sigma)$.

Les pertorbacions en el cercle unitari ($|f|=1$) corresponen a les variacions de fase pura, sense variació de guany; mentre que les pertorbacions en el eix real ($f \in \mathbb{R}$) corresponen a variacions de guany pur, sense variació de fase. Aquestes equivalències corresponen a l'anàlisi dels marges de guany i de fase mitjançant el model clàssic.

En particular, el llaç tancat és estable per les porcions del cercle unitari i de l'eix real, del pla complex, que interseca amb el disc $D(\alpha, \sigma)$.

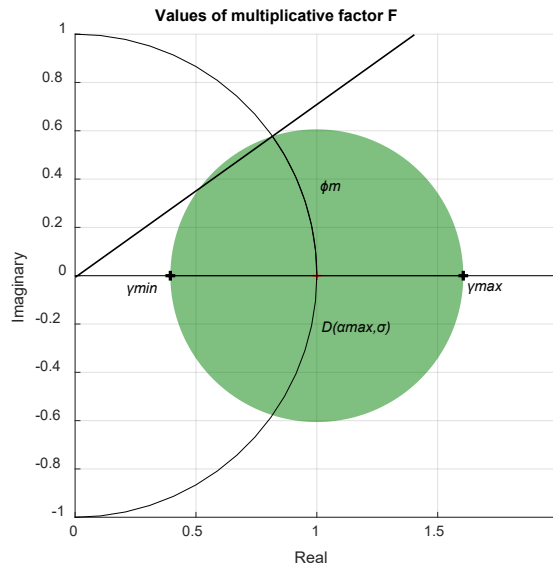


Fig. 70. Intersecció disc amb cercle unitari i eix real

Observar que $(\gamma_{min}, \gamma_{max})$ i $(-\phi_m, \phi_m)$ són nivells segurs de variacions de guany i de fase purs. Cada valor de desviació σ produeix un nou parell. Com ja hem esmentat en anteriors apartats, els marges de disc es poden utilitzar per quantificar el efecte de variacions combinades de guany i de fase en qualsevol llaç tancat. Simplement utilitzant geometria.

Considerant un cert nivell de variació de guany γ , la intersecció de la recta $y = x \tan \phi$ amb el cercle delimitat de $D(\alpha, \sigma)$ determina el rang segur $(-\phi_m, \phi_m)$ per a variacions de fase concurrent amb el guany γ . El valor de ϕ satisfà la següent equació equivalent al teorema del cosinus:

$$\gamma^2 - \gamma(\gamma_{min} + \gamma_{max}) \cos \phi + \gamma_{min} \gamma_{max} = 0$$

En el cas contrari, en el que es considera un cert nivell de variació de fase ϕ , el procediment és el mateix. Però, en aquest cas, la intersecció de la recta $y = x \cdot \tan \phi$ amb el cercle delimitat de $D(\alpha, \sigma)$ ens determinarà el rang segur (γ_-, γ_+) per a variacions de guany.

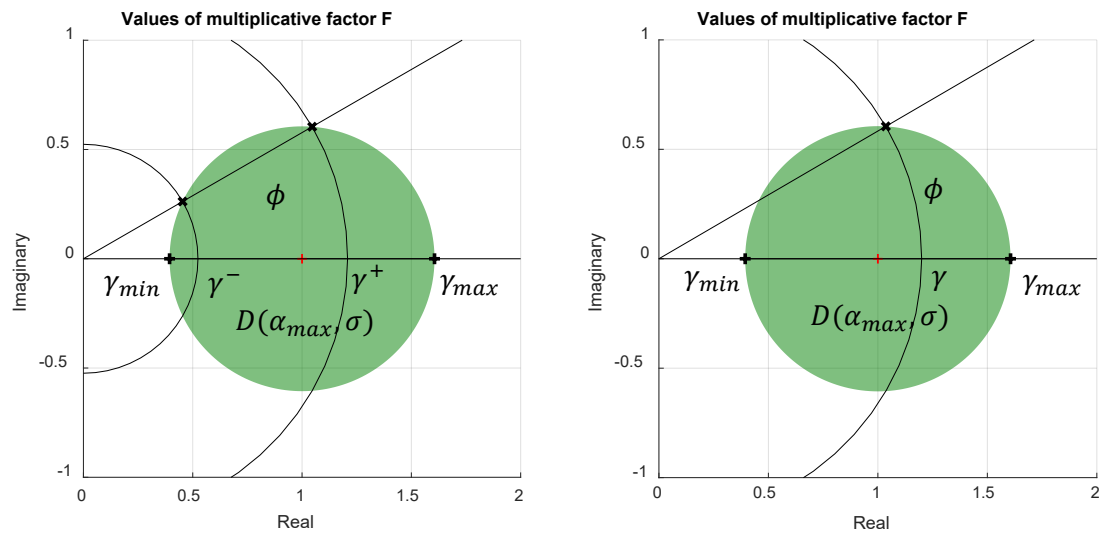


Fig. 72. Geometria per a variacions de guany admissibles per una variació de fase donada ϕ (esquerra) i variacions de fase admissibles per a una variació de guany donada γ (dreta)

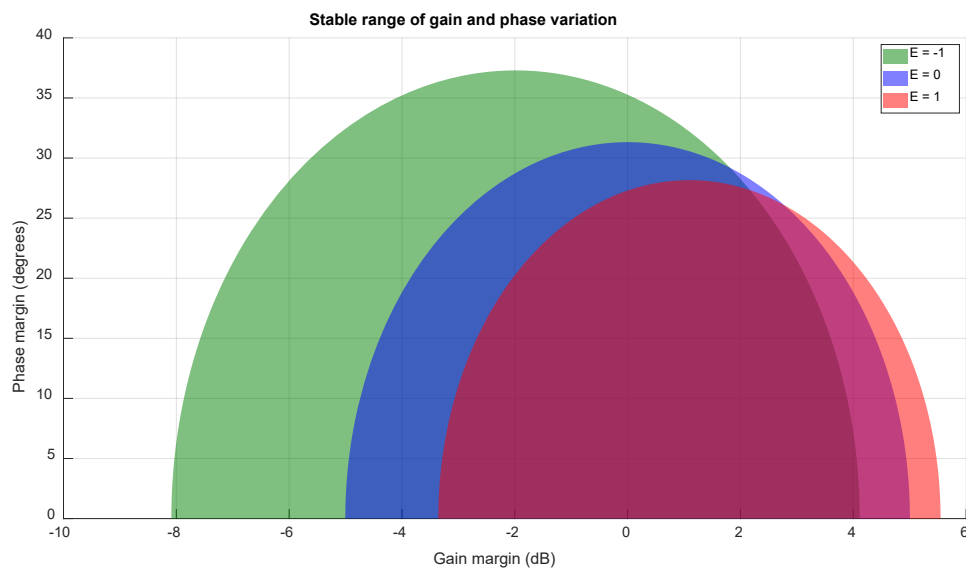


Fig. 71. Combinacions segures de guany i de fase

La Fig. 71 representa la regió que assegura la estabilitat. Quantifica com un marge de disc α_{max} es tradueix en nivells de seguretat per a combinacions de guany, de fase i una combinació de totes dues.

Es pot observar com el llaç tancat pot tolerar variacions de fase majors quan el guany decreix. La estabilitat del llaç és més sensible als increments de guany. Variant la desviació E podem obtenir una vista general de la sensibilitat a la incertesa del guany i de la fase.

5.3.4.2. Regions d'exclusió de Nyquist

Els marges de disc tenen una interpretació en el pla de *Nyquist*. L'anàlisi del marge de disc implica que $1 + fL(j\omega) \neq 0$ per a totes les pertorbacions que pertanyin al conjunt $D(\alpha, \sigma)$ i a totes les freqüències reals.

La condició d'estabilitat la podem reescriure com $L(j\omega) \neq -f^{-1}$. Aquesta condició es pot interpretar com la *regió d'exclusió de Nyquist*. La *trajectòria de Nyquist* no entrarà en aquesta regió. Aquesta conté el punt crític $(-1,0)$ i és tangent a la *corba de Nyquist* en algun punt $-1/f_o$. Variar la desviació σ produeix diferents regions d'exclusió amb diferents punts de contacte.

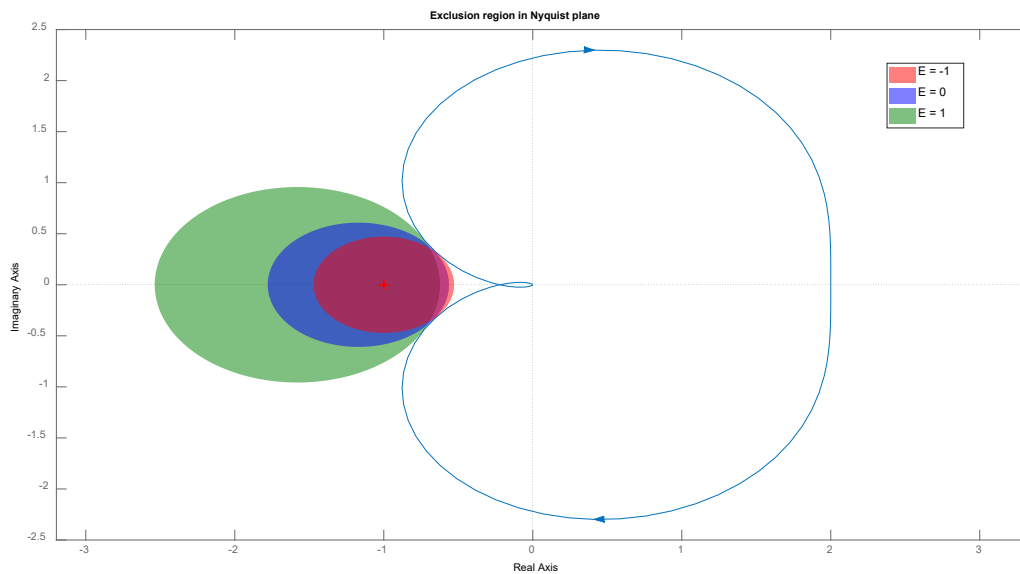


Fig. 73. Regions d'exclusió de Nyquist bassades en els marges de disc amb diferents desviacions

5.3.4.3. Aplicacions del marge de disc

Hi han dos anàlisis comuns de la robustesa que es poden realitzar amb el conjunt $D(\alpha, \sigma)$ de variacions de guany i de fase.

El primer anàlisi, s'enfoca en escollir una desviació σ i calcular el valor màxim d' α pel qual l'estabilitat del llaç tancat és manté. Això produeix un marge d'estabilitat que es pot utilitzar per estimar el grau de robustesa per a un llaç tancat.

Per tant, per a una desviació σ donada, el marge de disc α_{max} és el major valor d' α pel qual el llaç tancat està ben plantejat i és estable per totes les pertorbacions f pertanyents a un conjunt $D(\alpha, \sigma)$.

El segon anàlisi, és utilitzar $D(\alpha, \sigma)$ per a cobrir una variació de guany i de fase coneguts. Aquesta aproximació requereix coneixement sobre els errors de modelatge de la planta en termes de les variacions de guany i de fase. Aleshores, s'escullen valors per α i σ per aconseguir el menor conjunt $D(\alpha, \sigma)$ que cobreixi les variacions conegudes. L'objectiu en aquest cas és avaluar la robustesa del llaç tancat amb respecte a aquest conjunt de pertorbacions.

Per tal de simplificar els càlculs necessaris per establir el conjunt $D(\alpha, \sigma)$, *Matlab* ens proporciona una *toolbox* anomenada *Robust Control Toolbox* que conté funcions com ara:

- ***diskmargin()***. Computa els marges d'estabilitat basats en el marge de disc per a un sistema amb retroalimentació negativa.
- ***diskmarginplot()***. Visualitza els marges de fase basats en el marge de disc.
- ***getDGM()***. Converteix la variació de guany i fase en variació de guany basada en el marge de disc.
- ***getDPM()***. Variació de fase basada en el marge de disc corresponent a la variació de guany basada en el marge de disc.

6. Modelatge de blocs de control

En aquest apartat, es ficarà en pràctica tots els coneixements i mètodes esmentats anteriorment, per millorar el comportament de les plantes dissenyades en la primera fase d'aquest projecte.

Mitjançant l'aplicació *PID Tuner* proporcionada per *Matlab* en *Control System Toolbox*, es pot dissenyar amb major facilitat i rapidesa, compensadors *P*, *I*, *PI*, *PD* i *PID*, modificant la resposta transitòria del sistema, a criteri de dissenyador, mitjançant dues variables: comportament transitori (*transient behaviour*) i temps de resposta (*response time*).

Primer de tot, abans de realitzar el disseny, s'hauran de plantejar les millores que es volen aplicar a les plantes. Per aquest motiu, revisant la resposta d'aquestes per a un senyal d'entrada esglaió unitari, en llaç tancat, s'obté:

Planta	Temps d'assentament (t_s)[s]	Sobre elongació (M_p)[%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p)[s]	e_{ss} [V]
1	0.0074	40.0747	0.24513	0.0018	0.175
2	0.0257	63.0784	0.285387	0.0031	0.175
3	0.0020	0	0	0	0.175
4	0.0026	0	0	0	0.233
5	0.0359	0	0	0	0.233

Taula 16. Característiques resposta transitòria entrada esglaió, amplitud 0.35 V, més e_{ss} plantes primera fase

Aplicant l'anàlisi d'estabilitat mitjançant els mètodes clàssics i el marge de disc, s'obté:

Planta	Marges clàssics			Marge de disc $D(\alpha, \sigma)$		
	Marge de guany (K_g)[dB]	Marge de fase (γ)[°]	Desviació (σ)	Mida del disc (α)	Marge de guany [ud]	Marge de fase [°]
1	∞	70.5288	0	1.3229	[0.20378, 4.9073]	[-66.9643, 66.9643]
2	∞	33.8815	0	0.5904	[0.54416, 1.8377]	[-32.8931, 32.8931]
3	∞	180	0	2	[0, ∞]	[-90, 90]
4	∞	∞	0	2	[0, ∞]	[-90, 90]
5	∞	∞	0	4.0889	[0, ∞]	[-127.8705, 127.8705]

Taula 17. Marges estabilitat plantes primera fase

Analitzant la Taula 16, es pot observar que tant la tercera, com la quarta i la cinquena plantes presenten un comportament sobre esmorteït, sense sobre pic. Això es degut a que tant el tercer com el quart sistema són de primer ordre, en el cas del cinquè, es tracta d'un sistema de segon ordre sobre esmorteït ($\xi = 3.9547$), lo que comporta una aproximació a un de primer ordre.

En general, totes les plantes són prou ràpides, però, si cap a la possibilitat, podem accelerar el temps d'assentament, introduint l'acció preventiva, derivativa, amb un controlador. Si ho traduïm al lloc de les arrels, s'aconsegueix traslladant el lloc de les arrels a l'esquerra. Com s'ha demostrat en la Fig.39, on es pot visualitzar l'acció que provoca afegir zeros en llaç obert.

Tots els sistemes són de tipus 0, pel que presenten error en estat estacionari (e_{ss}) per un senyal d'entrada esglaó. Aquesta pot ser perfectament una raó de millorà. Si introduint un controlador, s'augmenta el tipus del sistema, acció integral, eliminarem aquest error, i també, obtindrem un error finit per a una entrada rampa; però, com s'ha pogut observar en la Fig.39, afegir pols en llaç obert desplaça el lloc de les arrels cap a la dreta, disminuint l'estabilitat del sistema.

Tant la primera com la segona planta, presenten un sobre pic elevat, sistemes de segon ordre subesmorteïts, pols complexos conjugats. Aquest pot ser un altre punt de millorà. Per exemple, aplicant un guany regulable, acció proporcional, es pot moure els pols en llaç tancat a una posició que ens generi un sobre pic inferior; o fins i tot, podem eliminar aquest sobre pic, convertint els pols complexos conjugats en reals, tot depèn de l'acció de control que es vulgui i es pugui obtenir.

Pel que fa a l'estabilitat de les plantes, la Taula 17 dona una idea de les limitacions que hauran de complir els blocs de control que s'aplicaran a les plantes. Com es pot observar, segons els marges clàssics, variacions de guany i fase pures, totes les plantes presenten un marge de guany (K_g) infinit, pel que no hi hauran restriccions a l'hora d'implantar l'acció de control proporcional, sense deixar de banda les limitacions elèctriques del nostre sistema. Pel que fa al marge de fase (γ) tret de la primera i segona planta, que presenten uns valors finits, la resta de plantes tenen marges de fase infinits.

Els marge de disc, com s'ha explicat en l'apartat 6.3.4, ens indica una regió tancada $D(\alpha, \sigma)$ en el pla complex, en la que donada una desviació del punt $f = 1$, el marge de disc és la major mida α per la qual el sistema en llaç tancat roman estable per totes les perturbacions tancades en $D(\alpha, \sigma)$. Aquestes perturbacions poden ser una combinació de guany i de fase, pel que és un bon indicador de les limitacions dels blocs de control que combinen diferents accions de control, per tal d'assegurar l'estabilitat en llaç tancat.

Per tant, un cop esmentades les principals millores aplicables a les plantes, es procedeix al disseny dels blocs de control. Cada planta, serà tractada independentment i les accions de millora seran implantades segons les característiques pròpies d'aquesta.

Un cop tinguem els controladors dissenyats, realitzarem les pertinents simulacions en els entorns *Matlab* i *Falstad*. Es presentarà una figura per cada controlador formada per tres o quatre gràfiques, depenent del tipus del sistema amb el controlador implantat.

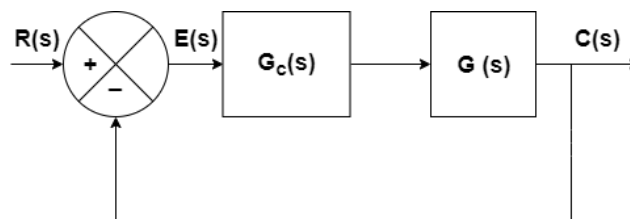


Fig. 74. Esquemàtic sistema de control genèric

Les gràfiques presentades seran les següents:

- a. **Lloc geomètric de les arrels en el pla S.** En el cas que el sistema presenti oscil·lacions en la resposta transitòria, sistema subesmorteït, s'afegiran els pols dominants.
- b. **Senyal de control (u).** En alguns casos, la implantació de certs blocs de control produirà que el amplificador operacional es saturi, simulacions amb amplificador operacional alimentat amb tensió de $\pm 12V$. Per aquest motiu, es representaran tres simulacions diferents:
 - Senyal de control simulada amb *Falstad*, amplificador operacional ideal ($V_{max} = 1 MV$; $V_{min} = -1 MV$; $Gain = 1 M$). En els casos que utilitzant una alimentació d'1 KV se segueixi saturant l'AO.
 - Senyal de control simulada amb *Falstad*, amplificador operacional ideal ($V_{max} = 1 KV$; $V_{min} = -1 KV$; $Gain = 1 M$).
 - Senyal de control simulada amb *Falstad*, amplificador operacional real ($V_{max} = 12 V$; $V_{min} = -12 V$; $Gain = 200 K$).
- c. **Senyal de sortida (V_{out}) resposta a entrada esglaió de 0.35 V d'amplitud.** Com en la gràfica anterior, degut a que l'amplificador operacional amb alimentació de $\pm 12 V$, es pot arribar a saturar, representarem quatre simulacions diferents:
 - Senyal d'entrada.
 - Senyal de sortida sense bloc de control simulada amb *Matlab*, amplificador operacional ideal ($V_{max} = \infty V$; $V_{min} = -\infty V$; $Gain = \infty$).
 - Senyal de sortida amb bloc de control simulada amb *Matlab*, amplificador operacional ideal ($V_{max} = \infty V$; $V_{min} = -\infty V$; $Gain = \infty$).
 - Senyal de sortida amb bloc de control simulada amb *Falstad*, amplificador operacional ideal ($V_{max} = 1 KV$; $V_{min} = -1 KV$; $Gain = 1 M$).
 - Senyal de sortida amb bloc de control simulada amb *Falstad*, amplificador operacional ideal ($V_{max} = 1 MV$; $V_{min} = -1 MV$; $Gain = 1 M$). En els casos que utilitzant una alimentació d'1 KV se segueixi saturant l'AO.
 - Senyal de sortida amb bloc de control simulada amb *Falstad*, amplificador operacional real ($V_{max} = 12 V$; $V_{min} = -12 V$; $Gain = 200 K$).
- d. **Senyal de sortida (V_{out}) resposta a entrada rampa unitària.** Aquesta gràfica solament s'afegirà per a sistemes que amb la implantació del bloc de control tinguin *tipus 1*. Ja que per a sistemes amb *tipus 0* aquesta no aportarà cap informació útil, perquè $e_{ss} = \infty$, com s'ha pogut comprovar en l'apartat 3.5. En aquest cas, solament es representarà la simulació realitzada amb *Matlab* envers el senyal d'entrada.

6.1.1. Control primera planta

Centrant-se en la millora de la primera planta, partint del diagrama de blocs a aplicar:

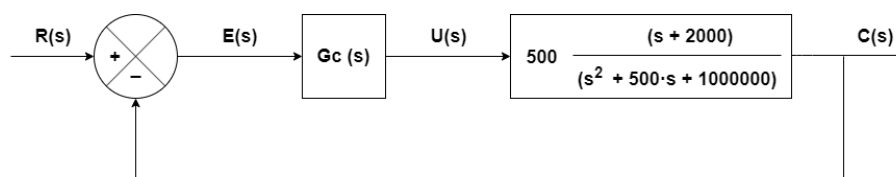


Fig. 75. Esquemàtic Bloc Control + Planta 1

En un primer moment, s'ha optat per aplicar tots els controladors realitzables, segons les característiques de la planta, esmentats en l'*apartat 4.6* amb l'ajuda de l'aplicació *PID Tuner*, amb la que es pot modelar la resposta transitòria per una entrada esglaó.

D'aquesta manera s'han obtingut els següents blocs de control:

Controlador	K_p	K_i	K_d
<i>P</i>	40	-	-
<i>PD</i>	400	-	0.000015
<i>I</i>	-	66.66667	-
<i>PI</i>	28	5600	-
<i>PID</i>	7.26	33000	0.000396

Taula 18. Controladors Planta 1

Un cop dissenyats els controladors de la primera planta, per realitzar les simulacions en l'entorn *Falstad*, s'haurà de dimensionar el circuit electrònic equivalent a cadascun dels controladors dissenyats en la *Taula 18*.

Seguint el model introduït per *K.Ogata*, *Fig. 37* i la *Taula 13*, on es troben les equivalències dels sistemes de control amb el seu semblant electrònic, s'obté:

Controlador	$R1[\Omega]$	$R2[\Omega]$	$R3[\Omega]$	$R4[\Omega]$	$C1[F]$	$C2[F]$	K_p	K_i	K_d
<i>P</i>	50	100	50	1k	-	-	40	-	-
<i>PD</i>	37.5	1k5	100	1k	1n	-	400	-	0.000015
<i>I</i>	1k5	-	1k	100	-	1u	-	66.66667	-
<i>PI</i>	100	5k	100	56	-	1u	28	5600	-
<i>PID</i>	1k	1k2	1k	3k3	100n	100n	7.26	33000	0.000396

Taula 19. Equivalència Control-Components Planta 1

Com en la primera fase, alhora de trobar l'equivalència envers la funció de transferència dels controladors i la funció de transferència del circuit electrònic equivalent, hi ha components prioritaris, amb menys marge de llibertat, com els condensadors. Per tant, el disseny s'ha centrat en fixar el valor dels condensadors, mitjançant les equacions establertes en la *Taula 14*, tenint en compte que aquests són no polaritzats, fet que redueix significativament la seva capacítància; i després, anar variant valors de resistències per obtenir el valor del controlador desitjat. També, s'ha tingut en compte que aquests components fossin econòmics i que tinguessin un bon *stock*.

Un cop determinats els controladors i els sistemes electrònics equivalents, es procedeix a realitzar les simulacions pertinents tant en l'entorn *Matlab* com en l'entorn *Falstad*. Els esquemes equivalents de tancar el llaç analògicament són els següents:

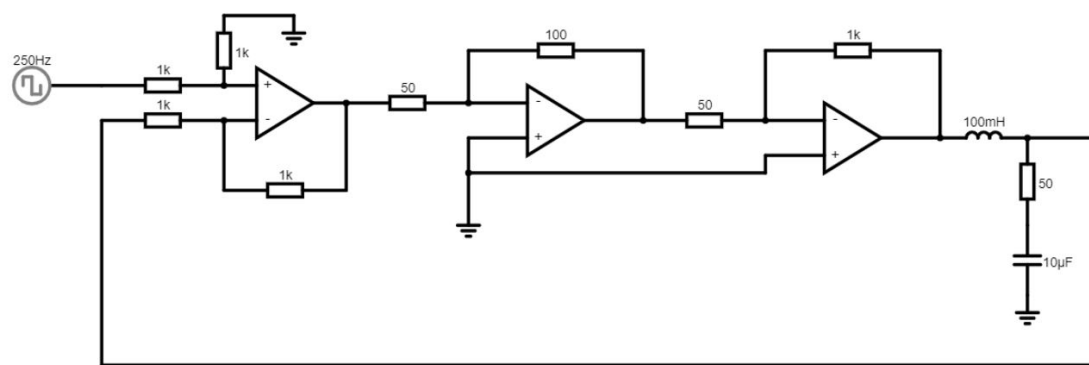


Fig. 76. Control Proporcional Planta 1

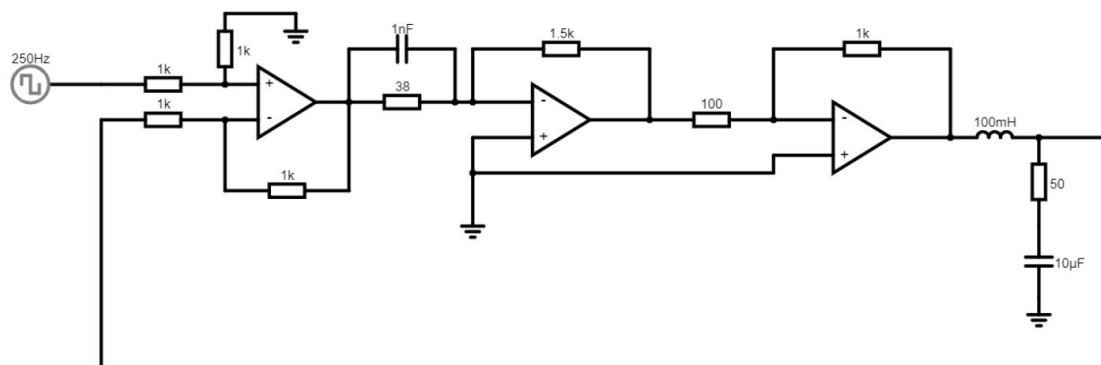


Fig. 77. Control Proporcional - Derivatiu Planta 1

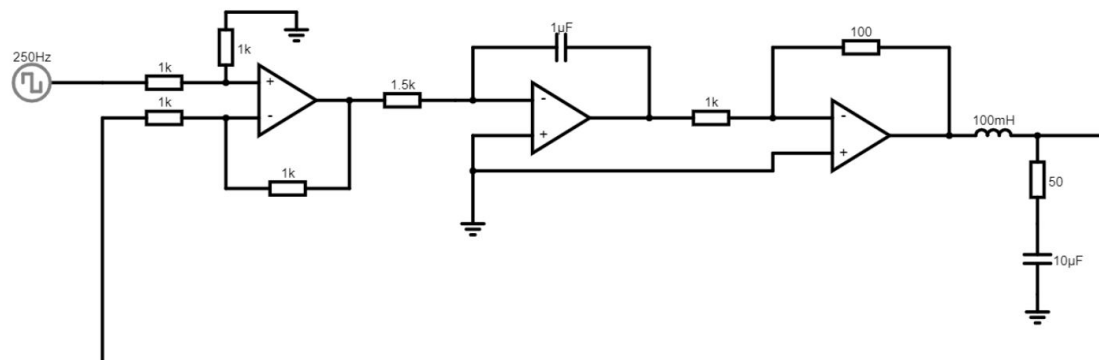


Fig. 78. Control Integral Planta 1

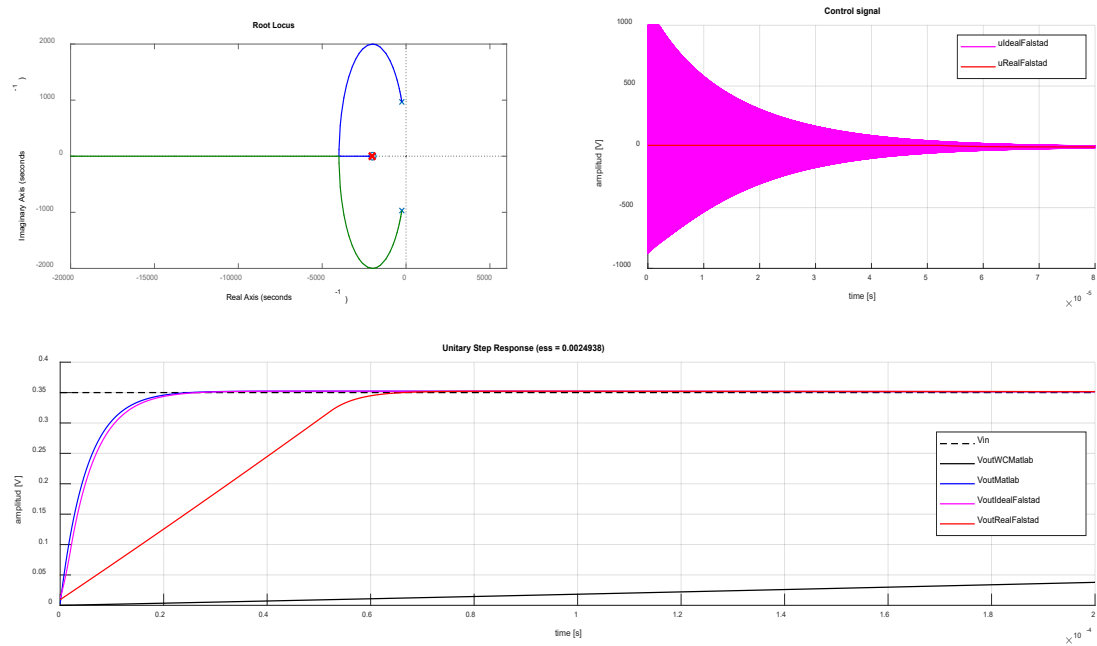


Fig. 82.. Matlab vs Falstad Simulacions Control PD Planta I

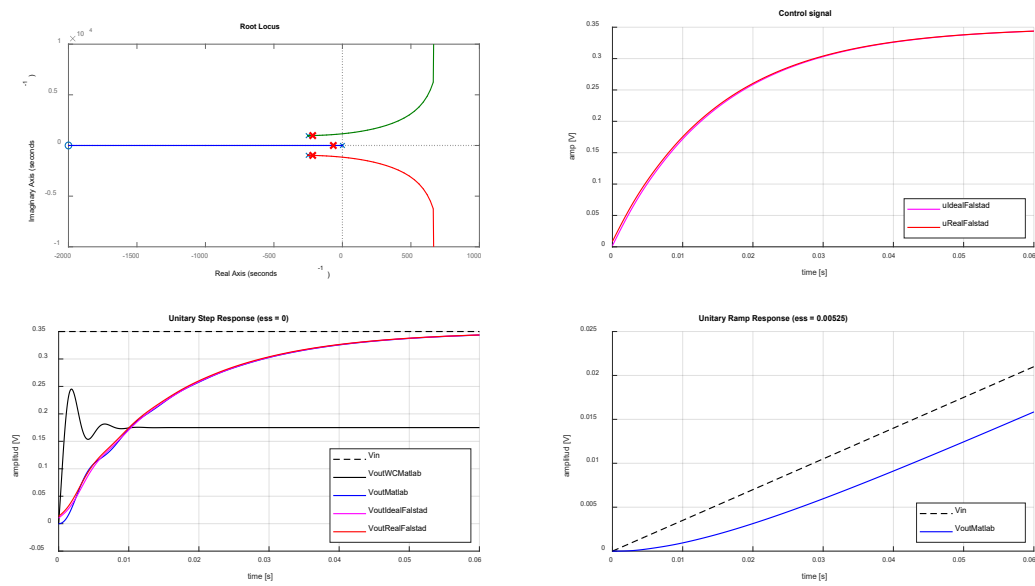


Fig. 83 . Matlab vs Falstad Simulacions Control I Planta I

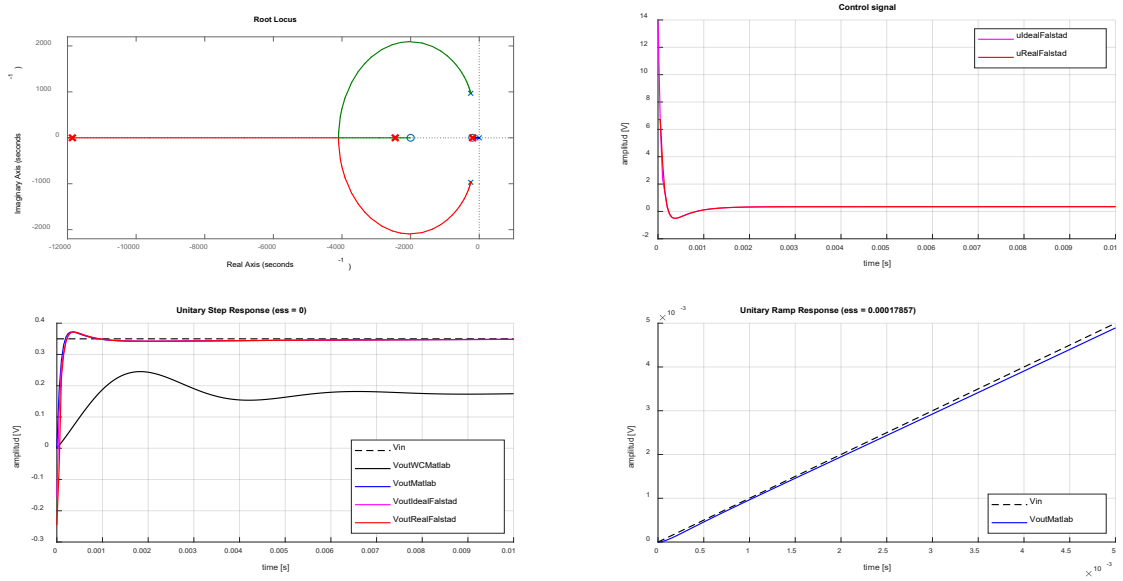


Fig. 84. Matlab vs Falstad Simulacions Control PI Planta I

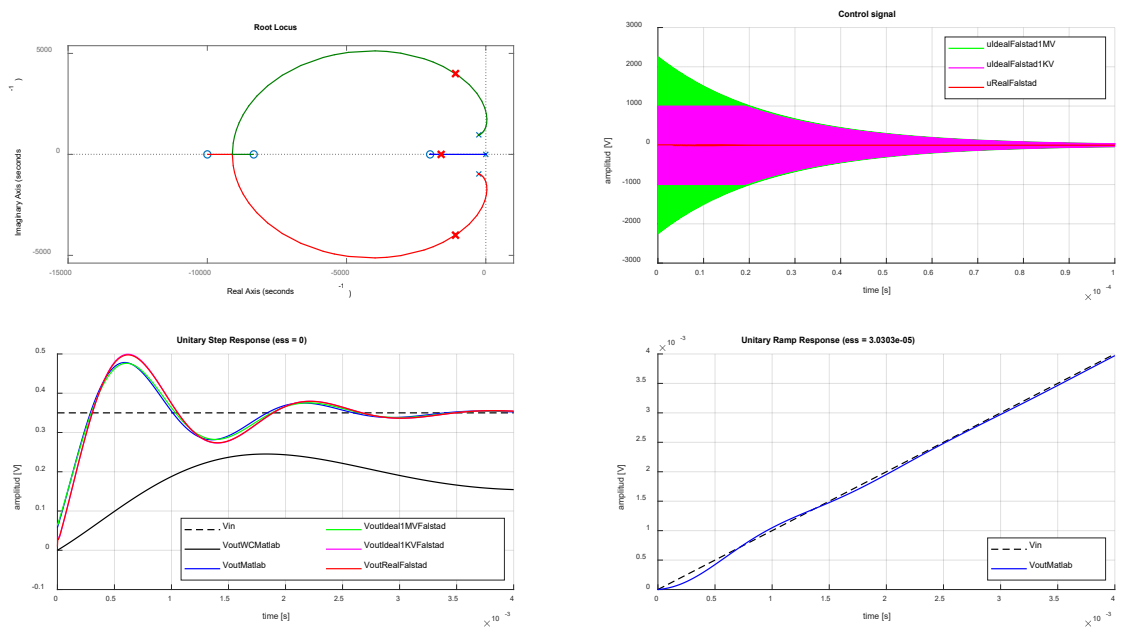


Fig. 85. Matlab vs Falstad Simulacions Control PID Planta I

Analitzant les gràfiques obtingudes, es poden fer les següents observacions:

- En alguns casos, variar el guany del sistema, acció de control proporcional, mourà els pols en llaç tancat a la posició desitjada. En el cas de la *Fig. 81* s'han transformat els pols complexos conjugats en llaç tancat en pols reals, accelerant d'aquesta manera el t_s del nostre sistema.
- En un entorn real, com el que es tindria en un laboratori, els amplificadors operacionals estaran alimentats amb una tensió de ± 12 V. Per tant, a l'aplicar un controlador que contingui una acció derivativa, la tensió de sortida del operacional es veurà saturada. Per aquest motiu, en les *Fig. 82 – 85* es pot observar tant en la gràfica de la senyal de control ($u(t)$) com en la senyal de sortida ($V_{out}(t)$), la no correspondència entre la simulació ideal, en el cas de l'entorn *Falstad*, utilitzant un amplificador operacional alimentat per una tensió de ± 1 KV, i la simulació real.
- La implementació d'un controlador *I* genera inestabilitat i retràs en el sistema. Com es pot observar en la *Fig. 83* el lloc de les arrels es veu totalment alterat, fent que aquest sigui pràcticament inestable. Tot i això, en el cas que s'ha implantat, s'ha escollit valors que assegurin l'estabilitat del sistema, amb lo qual aconseguim eliminar l'error en estat estacionari (e_{ss}) per una entrada esglaó, però, com ja s'ha esmentat, afegim retràs en el temps d'assentament (t_s).
- En la *Fig.84* es pot observar la gran millora que proporciona aplicar un control *PI* envers d'un *I*. Comparant la gràfica del lloc geomètric de les arrels de tots dos sistemes, es pot observar la millora d'estabilitat que ofereix el control *PI*. A continuació, realitzant l'anàlisi d'estabilitat podrem justificar aquest fet. Com s'ha esmentat en l'*apartat 4.3*, l'acció de control integral és complementa amb l'acció de control proporcional, beneficiant-se de totes dues accions. Instantàniament actuarà l'acció reguladora proporcional, mentre que l'acció de control integral actuarà durant un interval de temps, conegut com temps integral (T_i).
- Com s'ha esmentat amb anterioritat, la implantació d'un controlador que contingui una acció integral augmenta el tipus del sistema, en aquest cas a *tipus 1*, fet que comporta que s'elimini l' e_{ss} per una entrada esglaó i també, que l' e_{ss} per una entrada rampa sigui finit. Per aquest motiu, les *Fig.83 – 84 – 85* integren la gràfica del senyal de sortida per a l'entrada d'una rampa unitària.

Un cop esmentades, a grans trets, les principals diferències entre els diferents controladors, en les següents taules es disposen de les dades analítiques més rellevants de la resposta de la primera planta amb els diversos controladors implantats obtingudes en l'entorn *Matlab*:

Control	Temps d'assentament (t_s)[s]	Sobre elongació (M_p)[%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p)[s]	e_{ss} (step) [V]	e_{ss} (ramp) [V]
	0.0074	40.0747	0.24513	0.0018	0.175	∞
P	0.00086734	6.8347	0.3548009717	0.00026238	0.008537	∞
PD	0.000017854	0.8536	0.3521	0.00004831	0.00087282	∞
I	0.0588	0	0	0	0	0.00525
PI	0.0030	6.2953	0.372	0.00033399	0	0.00017857
PID	0.0032	36.6362	0.4782267	0.00059293	0	0.000030303

Taula 20. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35 V, Planta 1 més e_{ss} rampa unitària (Matlab)

I en l'entorn *Falstad* (amplificador operacional alimentat amb ± 12 V):

Control	Temps d'assentament (t_s)[s]	Sobre elongació (M_p)[%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p) [s]	e_{ss} (step) [V]
	0.0074	36	0.238	0.0019	0.175
P	0.0008366	7	0.364295	0.00028	0.008
PD	0.0877	0	0	0	0.000873
I	0.0583	0	0	0	0
PI	0.00305	6	0.37174	0.00035	0
PID	0.00325	42	0.4976	0.0006192	0

Taula 21. Característiques resposta entrada esglaió, amplitud 0.35 V, Planta 1 (Falstad)

Com s'ha esmentat en l'anterior apartat, aplicar blocs de control pot modificar el lloc geomètric de les arrels, per tant, l'estabilitat, també es pot veure afectada. Per aquest motiu, hem realitzat l'anàlisi d'estabilitat per cadascun dels controladors, pel mètode clàssic i pel marge de disc. D'aquesta manera s'obté:

Marges clàssics				Marge de disc $D(\alpha, \sigma)$		
Controlador	Marge de guany (K_g)[dB]	Marge de fase (γ)[°]	Desviació (σ)	Mida del disc (α)	Marge de guany [ud]	Marge de fase [°]
-	∞	70.5288	0	1.3229	[0.20378, 4.9073]	[-66.9643, 66.9643]
P	∞	85.7549	0	1.72699	[0.061041, 16.3824]	[-83.0139, 83.0139]
PD	∞	90	0	1.9212	[0.0042606, 137.7288]	[-89.168, 89.168]
I	10.0006	89.9914	0	1.5312	[0.13275, 7.5331]	[-74.8768, 74.8768]
PI	∞	83.2033	0	1.6627	[0.092105, 10.8572]	[-79.4753, 79.4753]
PID	0.15564	40.2626	0	0.62349	[0.52469, 1.9059]	[-34.6291, 34.6291]

Taula 22. Marges estabilitat controladors Planta 1

Es pot observar com tant la implantació del controlador *I* com el *PID*, en aquest cas redueixen significativament el marge de guany K_g , el fan més proper a la inestabilitat, menys robust. El controlador *PID*, també redueix el marge de fase del sistema, fent-lo menys robust a pertorbacions de fase. Per l'altra banda, podem observar que el controlador *PD*, en aquest cas, és el que ens aporta major robustesa al nostre sistema.

El marge de disc, ens dona una altra percepció de l'estabilitat més complerta, afegint en la equació les pertorbacions simultànies de guany i de fase, com ja s'ha estat parlant en els anteriors capítols. En aquesta planta, el controlador *PD*, amb la configuració establerta en la taula 18, és el que ens ofereix un major marge de disc.

L'objectiu principal d'aquest projecte sempre ha estat crear material docent de baix cost per a pràctiques de Teoria Bàsica de Control, per tant, des del punt de vista més educatiu, l'alumnat ha de poder aplicar tots els coneixements adquirits durant el curs. Per això, tenint en compte la gràfica del llocs de les arrels dels sistemes compensats, per tal de poder aplicar les fórmules de la resposta transitòria (M_p , t_p i t_s), necessitem que els pols objectius, pols en llaç tancat, siguin complexos conjugats, és a dir $0 < \xi < 1$, sistema subesmorteït.

En el cas contrari, quan els pols són reals, no hi hauran oscil·lacions produïdes per aquests. Pot donar-se el cas de que es produeixi algun canvi de sentit per l'acció d'un zero, com es produeix en les Fig. 81 – 84. D'aquesta manera, amb pols reals, es poden trobar els valors característics dels compensadors a partir de les fórmules de l' e_{ss} .

6.1.2. Control segona planta

Centrant-se en la millora de la segona planta, partint del diagrama de blocs a aplicar:

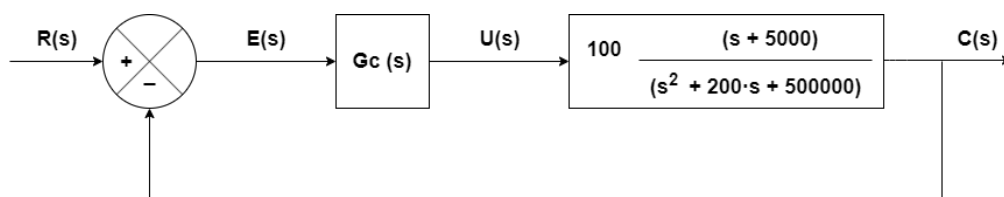


Fig. 86. Esquemàtic Bloc Control + Planta 2

En un primer moment, s'ha optat per aplicar tots els controladors realitzables, segons les característiques de la planta, esmentats en l'apartat 4.6 amb l'ajuda de l'aplicació *PID Tuner*, amb la que es pot modelar la resposta transitòria per una entrada esglaó.

D'aquesta manera s'han obtingut els següents blocs de control:

Controlador	K_p	K_i	K_d
P	40	-	-
PD	71.42857143	-	0.0025
I	-	66.66667	-
PI	33	3300	-
PID	41.25	33000	0.00825

Taula 23. Controladors Planta 2

Un cop dissenyats els controladors de la segona planta, per realitzar les simulacions en l'entorn *Falstad*, s'haurà de dimensionar el circuit electrònic equivalent a cadascun dels controladors dissenyats en la Taula 23.

Seguint el model introduït per *K.Ogata*, Fig. 37 i la Taula 13, on es troben les equivalències dels sistemes de control amb el seu semblant electrònic, s'obté:

Controlador	$R1[\Omega]$	$R2[\Omega]$	$R3[\Omega]$	$R4[\Omega]$	$C1[F]$	$C2[F]$	K_p	K_i	K_d
P	50	100	50	1k	-	-	40	-	-
PD	3k5	5k	100	5k	10n	-	71.42857143	-	0.0025
I	1k	-	1k5	1k	-	10u	-	66.66667	-
PI	1k	10k	1k	3k3	-	1u	33	3300	-
PID	10k	25k	1k	3k3	100n	10n	41.25	33000	0.00825

Taula 24. Equivalència Control-Components Planta 2

Com en la primera fase, alhora de trobar l'equivalència envers la funció de transferència dels controladors i la funció de transferència del circuit electrònic equivalent, hi ha components prioritaris, amb menys marge de llibertat, com els condensadors. Per tant, el disseny s'ha centrat en fixar el valor dels condensadors, mitjançant les equacions establertes en la Taula 14, tenint en compte que aquests són no polaritzats, fet que redueix significativament la seva capacítancia; i després, anar variant valors de resistències per obtenir el valor del controlador desitjat. També, s'ha tingut en compte que aquests components fossin econòmics i que tinguessin un bon *stock*.

Un cop determinats els controladors i els sistemes electrònics equivalents, es procedeix a realitzar les simulacions pertinents tant en l'entorn *Matlab* com en l'entorn *Falstad*. Els esquemes equivalents de tancar el laç analògicament són els següents:

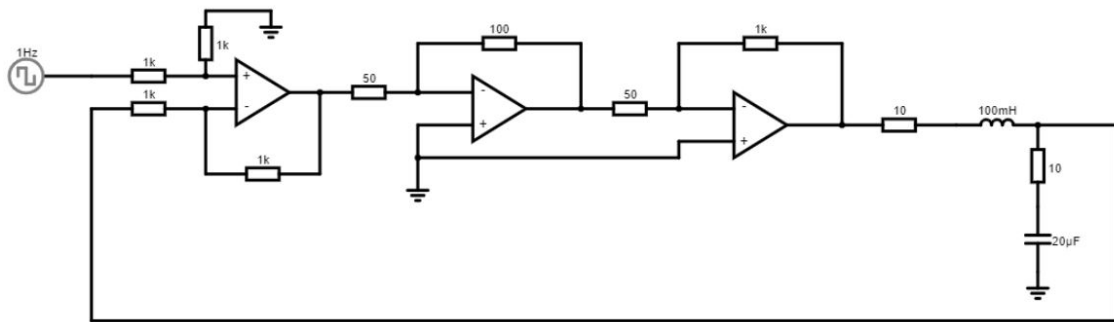


Fig. 87. Control Proporcional Planta 2

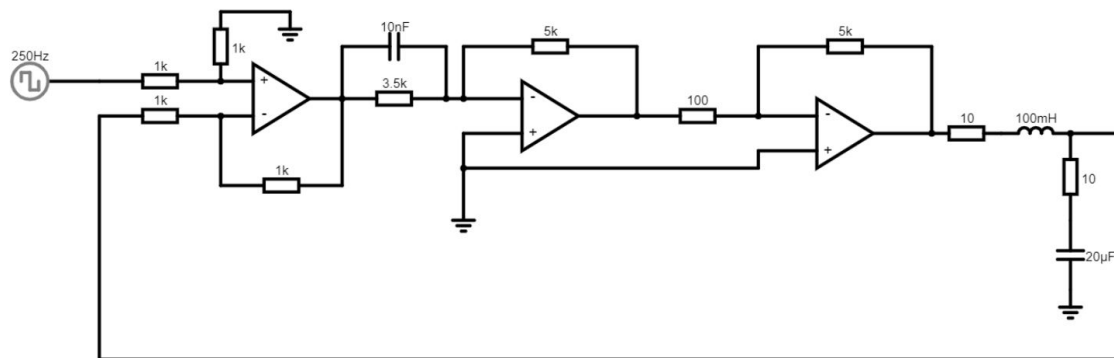


Fig. 88. Control Proporcional-Derivatiu Planta 2

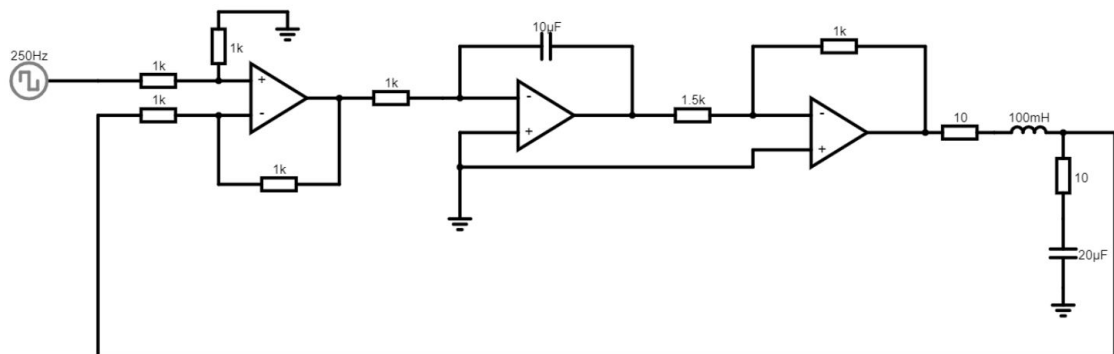


Fig. 89. Control Integral Planta 2

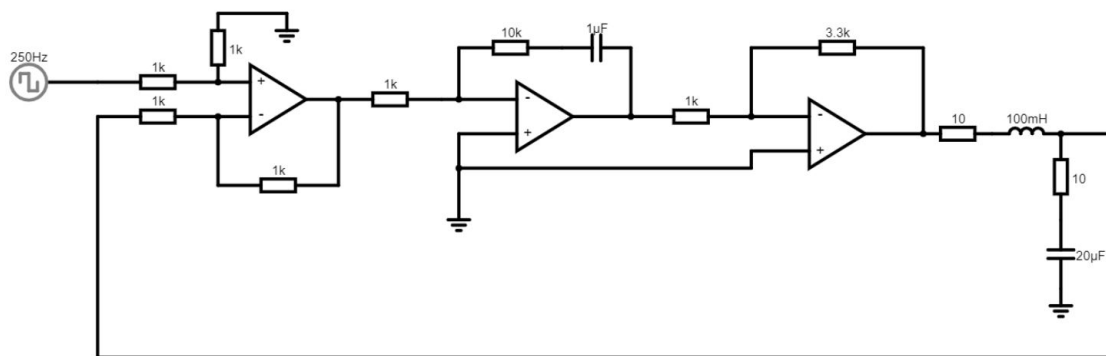


Fig. 90. Control Proporcional-Integral Planta 2

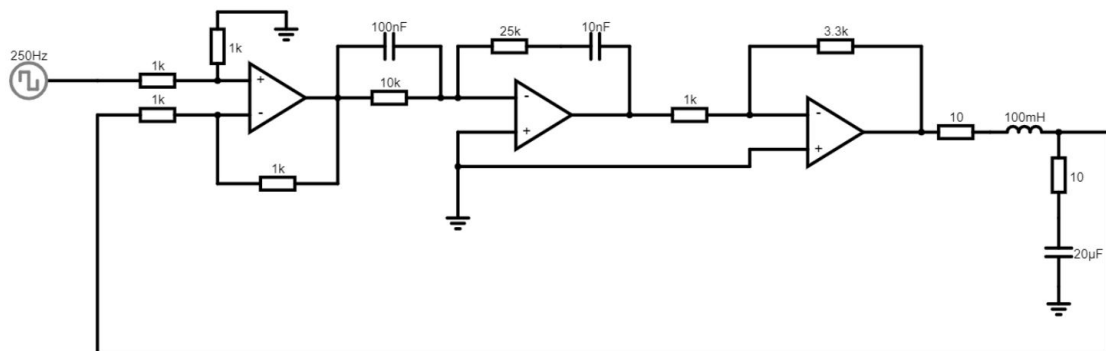


Fig. 91. Control Proporcional-Integral-Derivatiu Planta 2

Un cop realitzades les simulacions en tots dos entorns. S'obtenen les següents gràfiques:

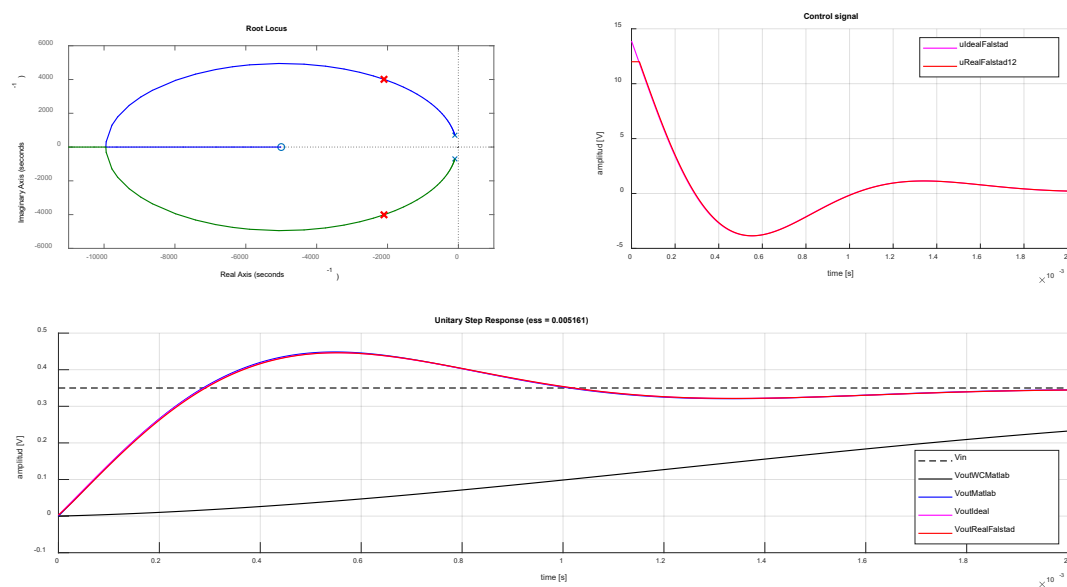


Fig. 92. Matlab vs Falstad Simulacions Control P Planta 2

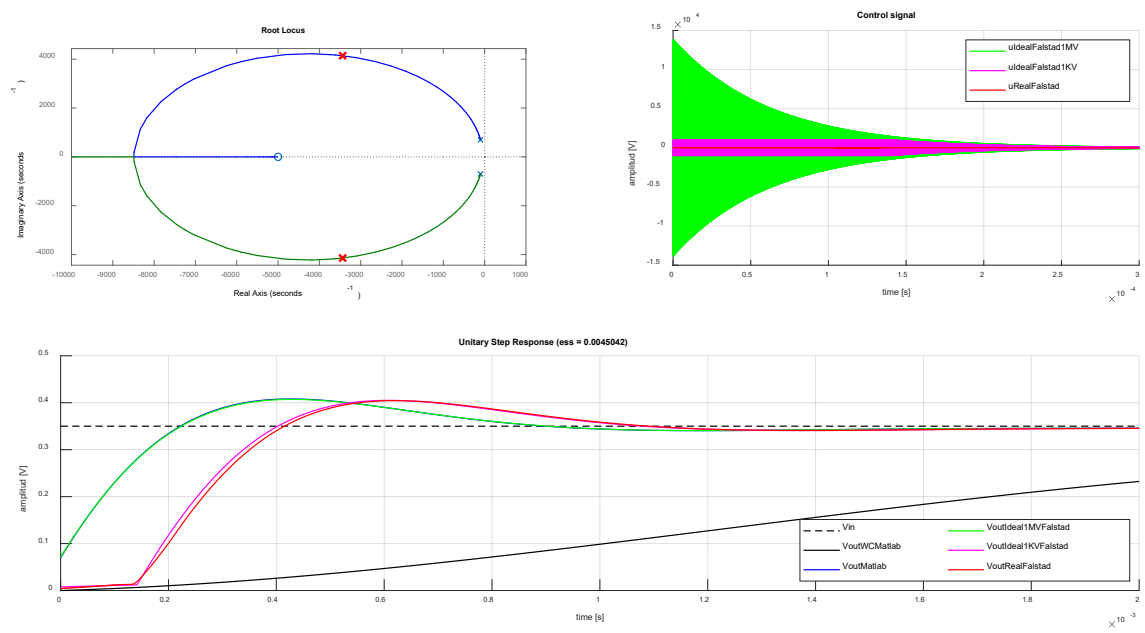


Fig. 93. Matlab vs Falstad Simulacions Control PD Planta 2

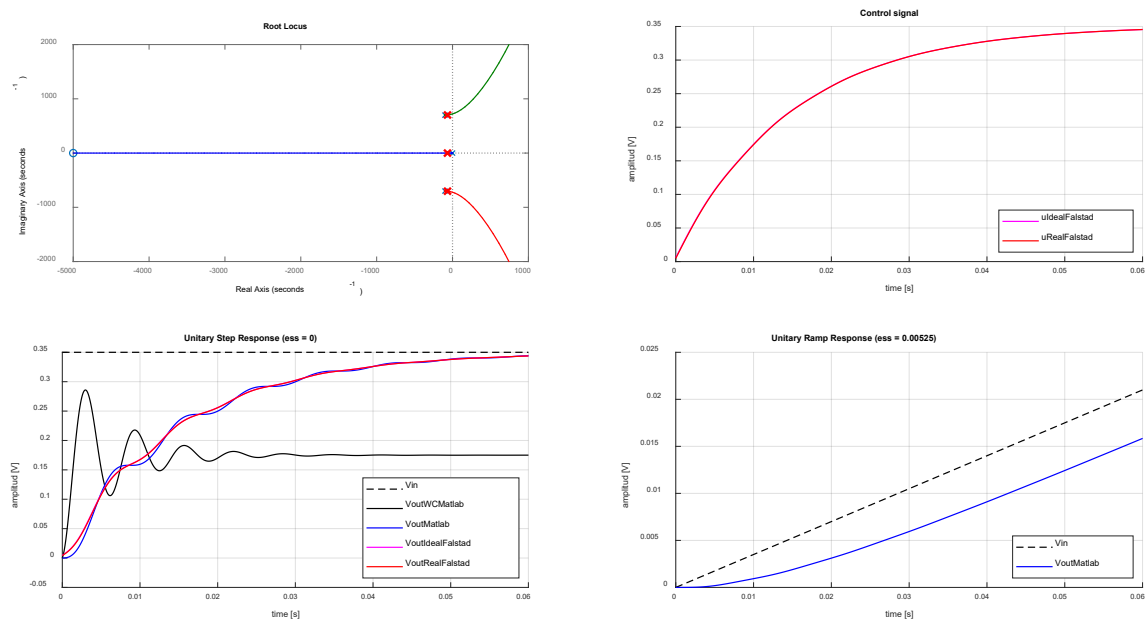


Fig. 94. Matlab vs Falstad Simulacions Control I Planta 2

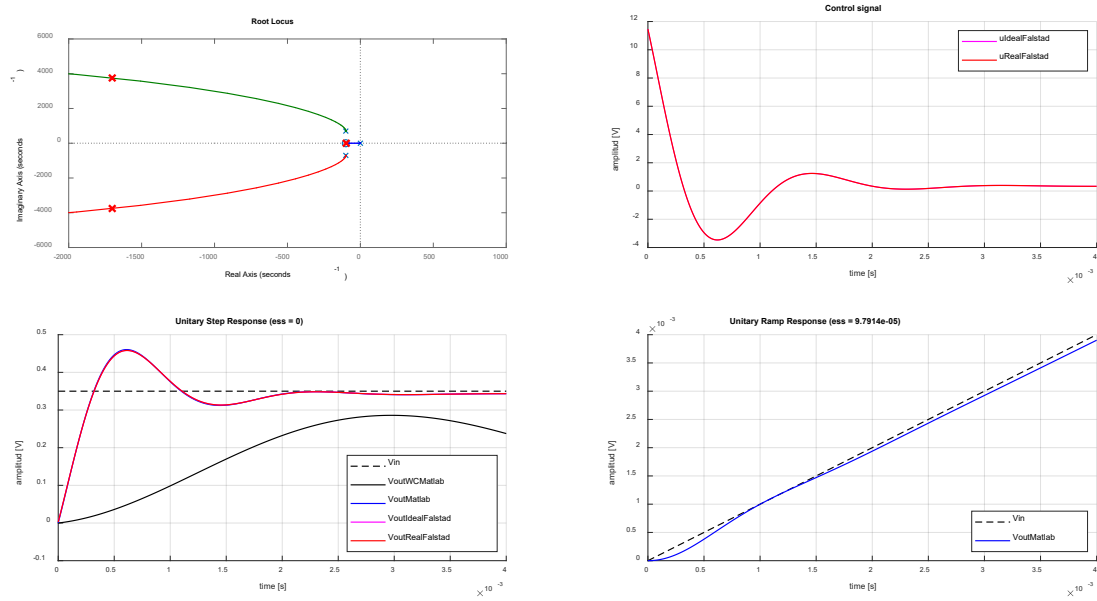


Fig. 95. Matlab vs Falstad Simulacions Control PI Planta 2

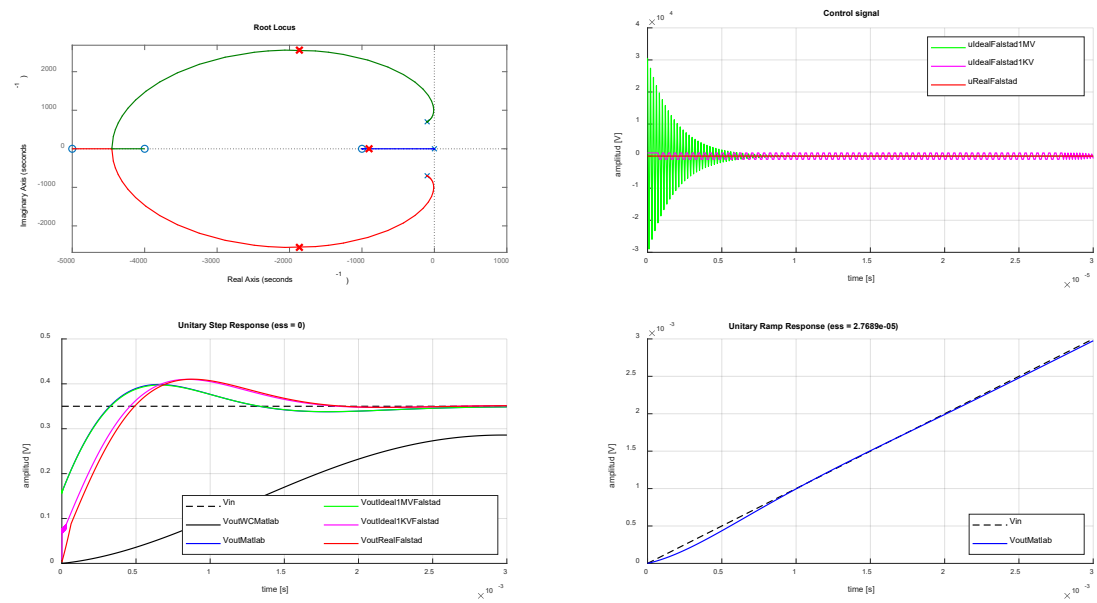


Fig. 96. Matlab vs Falstad Simulacions Control PID Planta 2

Analitzant les gràfiques obtingudes, es poden fer les següents observacions:

- En alguns casos, variar el guany del sistema, acció de control proporcional, mourà els pols en llaç tancat a la posició desitjada. En el cas de la Fig. 93 s'han desplaçat els pols complexos conjugats en llaç tancat cap a l'esquerra, accelerant d'aquesta manera el t_s del nostre sistema. En aquest cas, els pols objectiu seran complexos conjugats, per tant es podran aplicar les formules temporals de la resposta transitòria.
- En un entorn real, com el que es tindria en un laboratori, els amplificadors operacionals estaran alimentats per una tensió de $\pm 12\text{ V}$. Per tant, a l'aplicar un controlador que contingui una acció derivativa, la tensió de sortida del operacional es veurà saturada. Per aquest motiu, en les Fig. 94 – 97 es pot observar tant en la gràfica de la senyal de control ($u(t)$) com en la senyal de sortida ($V_{out}(t)$), la no correspondència entre la simulació ideal, en el cas de l'entorn *Falstad*, utilitzant un amplificador operacional alimentat per una tensió de $\pm 1\text{ MV}$, i la simulació real.
- La implementació d'un controlador *I* genera inestabilitat i retràs en el sistema. Com es pot observar en la Fig. 95 el lloc de les arrels es veu totalment alterat, fent que aquest sigui pràcticament inestable. Tot i això, en el cas que s'ha implantat, s'ha escollit valors que assegurin l'estabilitat del sistema, amb lo que eliminem l'error en estat estacionari (e_{ss}) per una entrada esglaó, però, com ja s'ha esmentat, retardem el temps d'assentament (t_s).
- En la Fig. 96 es pot observar la gran millora que proporciona aplicar un control *PI* envers d'un *I*. Comparant la gràfica de les arrels de tots dos sistemes, es pot observar la millora d'estabilitat que ofereix el control *PI*. A continuació, realitzant l'anàlisi d'estabilitat podrem justificar aquest fet. Com s'ha esmentat en l'apartat 4.3, l'acció de control integral és complementa amb l'acció de control proporcional, beneficiant-se de totes dues accions. Instantàniament actuarà l'acció reguladora proporcional, mentre que l'acció de control integral actuarà durant un interval de temps, conegut com temps integral (T_i).
- Com s'ha esmentat amb anterioritat, la implantació d'un controlador que contingui una acció integral augmenta el tipus del sistema, en aquest cas a *tipus 1*, fet que comporta que s'elimini l' e_{ss} per una entrada esglaó i també, que l' e_{ss} per una entrada rampa sigui finit. Per aquest motiu, les Fig. 95 – 96 – 97 integren la gràfica del senyal de sortida per a l'entrada d'una rampa unitària.

Un cop esmentades, a grans trets, les principals diferències entre els diferents controladors, en les següents taules es disposen de les dades analítiques més rellevants de la resposta de la primera planta amb els diversos controladors implantats obtingudes en l'entorn *Matlab*:

Control	Temps d'assentament (t_s) [s]	Sobre elongació (M_p) [%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p) [s]	e_{ss} (step) [V]	e_{ss} (ramp) [V]
	0.0257	63.0784	0.285387	0.0031	0.175	∞
P	0.0017	31.3430	0.45292	0.00054823	0.005161	∞
PD	0.00089154	18.1993	0.4132	0.00042874	0.0045042	∞
I	0.0582	0	0	0	0	0.00525
PI	0.0037	31.5313	0.46036	0.00062251	0	0.000097914
PID	0.0026	13.8575	0.3985	0.64238	0	0.000027689

Taula 25. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35 V, Planta 2 més e_{ss} rampa unitària (Matlab)

I en l'entorn *Falstad* (amplificador operacional alimentat amb $\pm 12\text{ V}$):

Control	Temps d'assentament (t_s)[s]	Sobre elongació (M_p)[%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p) [s]	e_{ss} (step) [V]
	0.0257	58	0.277	0.00295	0.175
P	0.0017522	30	0.4463	0.0005535	0.0056
PD	0.0011	17	0.4044	0.0006203	0.0047
I	0.0584	0	0	0	0
PI	0.003714	31	0.4581	0.0006142	0
PID	0.00214	17	0.4103	0.0008806	0

Taula 26. Característiques resposta entrada esglaió, amplitud 0.35 V, Planta 2 (Falstad)

Com s'ha esmentat en l'anterior apartat, aplicar blocs de control pot modificar el lloc geomètric de les arrels, per tant, l'estabilitat, també es pot veure afectada. Per aquest motiu, hem realitzat l'anàlisi d'estabilitat per cadascun dels controladors, pel mètode clàssic i pel marge de disc. D'aquesta manera s'obté:

Marges clàssics				Marge de disc $D(\alpha, \sigma)$		
Controlador	Marge de guany (K_g)[dB]	Marge de fase (γ)[°]	Desviació (σ)	Mida del disc (α)	Marge de guany [ud]	Marge de fase [°]
-	∞	33.8815	0	0.5904	[0.54416, 1.8377]	[-32.8931, 32.8931]
P	∞	49.8212	0	0.87339	[0.39208, 2.5505]	[-47.1814, 47.1814]
PD	∞	78.2499	0	1.2767	[0.22076, 4.5299]	[-65.1026, 65.1026]
I	3.1261	89.2155	0	1	[0.33333, 3.0001]	[-53.1307, 53.1307]
PI	∞	45.3206	0	0.78939	[0.434, 2.3041]	[-43.078, 43.078]
PID	∞	127.5	0	1.3685	[0.18746, 5.3345]	[-68.7651, 68.7651]

Taula 27. Marges estabilitat controladors Planta 2

Com també s'ha pogut observar en l'anterior planta, la implantació d'un controlador integral redueix significativament el marge de guany K_g , el fa més proper a la inestabilitat, menys robust. Per lo contrari, el controlador *PID* manté el marge de guany i augmenta el marge de fase del sistema, fent-lo més robust a pertorbacions de fase.

En aquesta planta, el controlador *PID*, amb la configuració establerta en la taula 23, és el que ens ofereix un major marge de disc.

6.1.3. Control tercera planta

Centrant-se en la millora de la tercera planta, partint del diagrama de blocs a aplicar:

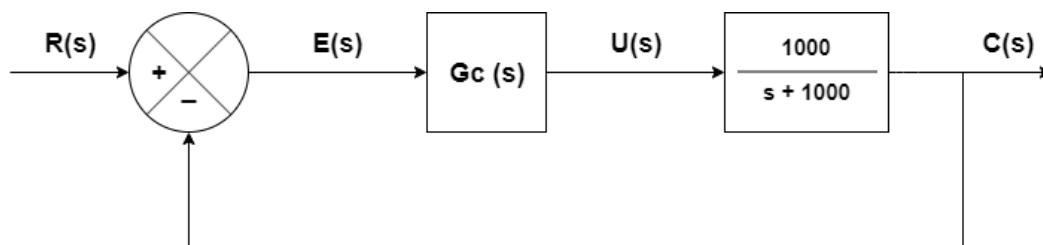


Fig. 97. Esquemàtic Bloc Control + Planta 3

En aquesta planta s'han aplicat tots els controladors esmentats en l'apartat 4.6, menys el controlador *PD*, sistema enllaçat tancat no causal. Els controladors restants s'han dissenyat amb

l'ajuda de l'aplicació *PID Tuner*, amb la que es pot modelar la resposta transitòria per una entrada esglaó.

D'aquesta manera s'han obtingut els següents blocs de control:

Controlador	K_p	K_i	K_d
P	100	-	-
PD	-	-	-
I	-	4000	-
PI	75	75000	-
PID	188	470000	0.0141

Taula 28. Controladors Planta 3

Un cop dissenyats els controladors de la tercera planta, per realitzar les simulacions en l'entorn *Falstad*, s'haurà de dimensionar el circuit electrònic equivalent a cadascun dels controladors dissenyats en la Taula 28.

Seguint el model introduït per *K.Ogata*, Fig. 37 i la Taula 13, on es troben les equivalències dels sistemes de control amb el seu semblant electrònic, s'obté:

Controlador	$R1[\Omega]$	$R2[\Omega]$	$R3[\Omega]$	$R4[\Omega]$	$C1[F]$	$C2[F]$	K_p	K_i	K_d
P	1k	10k	1k	10k	-	-	100	-	-
PD	-	-	-	-	-	-	-	-	-
I	1k	-	500	2k	-	1u	-	4000	-
PI	100	10k	4k	3k	-	100n	75	75000	-
PID	10k	30k	100	4k7	10n	10n	188	470000	0.0141

Taula 29. Equivalència Control-Components Planta 3

Com en la primera fase, alhora de trobar l'equivalència envers la funció de transferència dels controladors i la funció de transferència del circuit electrònic equivalent, hi ha components prioritaris, amb menys marge de llibertat, com els condensadors. Per tant, el disseny s'ha centrat en fixar el valor dels condensadors, mitjançant les equacions establertes en la Taula 14, tenint en compte que aquests són no polaritzats, fet que redueix significativament la seva capacítancia; i després, anar variant valors de resistències per obtenir el valor del controlador desitjat. També, s'ha tingut en compte que aquests components fossin econòmics i que tinguessin un bon *stock*.

Un cop determinats els controladors i els sistemes electrònics equivalents, es procedeix a realitzar les simulacions pertinents tant en l'entorn *Matlab* com en l'entorn *Falstad*. Els esquemes equivalents de tancar el llaç analògicament són els següents:

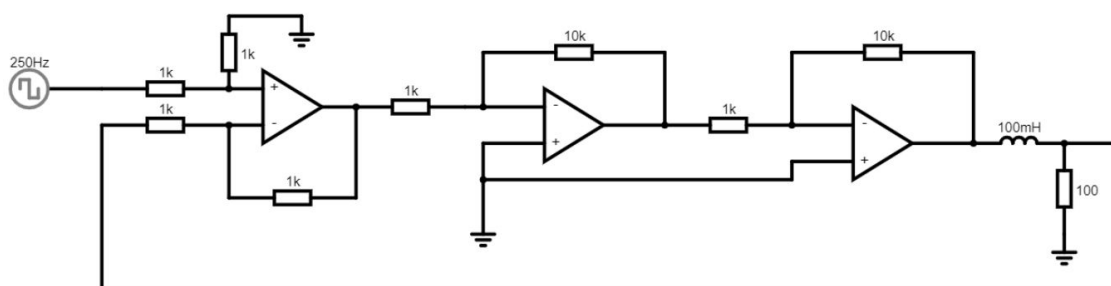


Fig. 98. Control Proporcional Planta 3

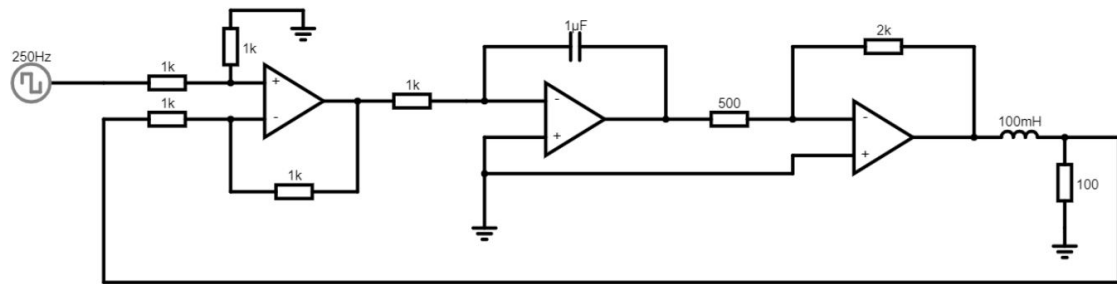


Fig. 99. Control Integral Planta 3

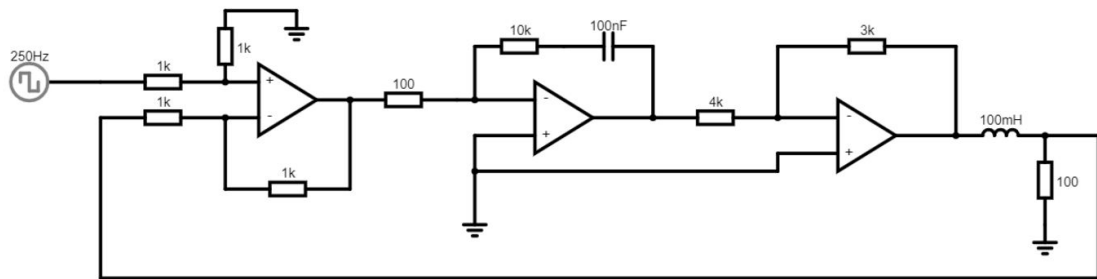


Fig. 100. Control Proporcional-Integral Planta 3

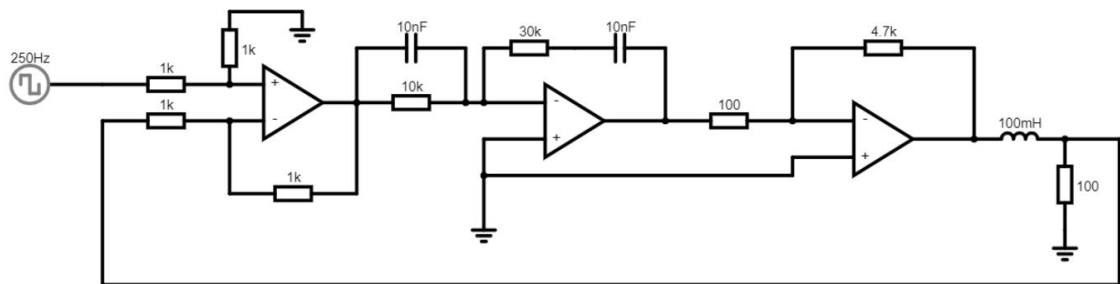


Fig. 101. Control Proporcional-Integral-Derivativu Planta 3

Un cop realitzades les simulacions en tots dos entorns. S'obtenen les següents gràfiques:

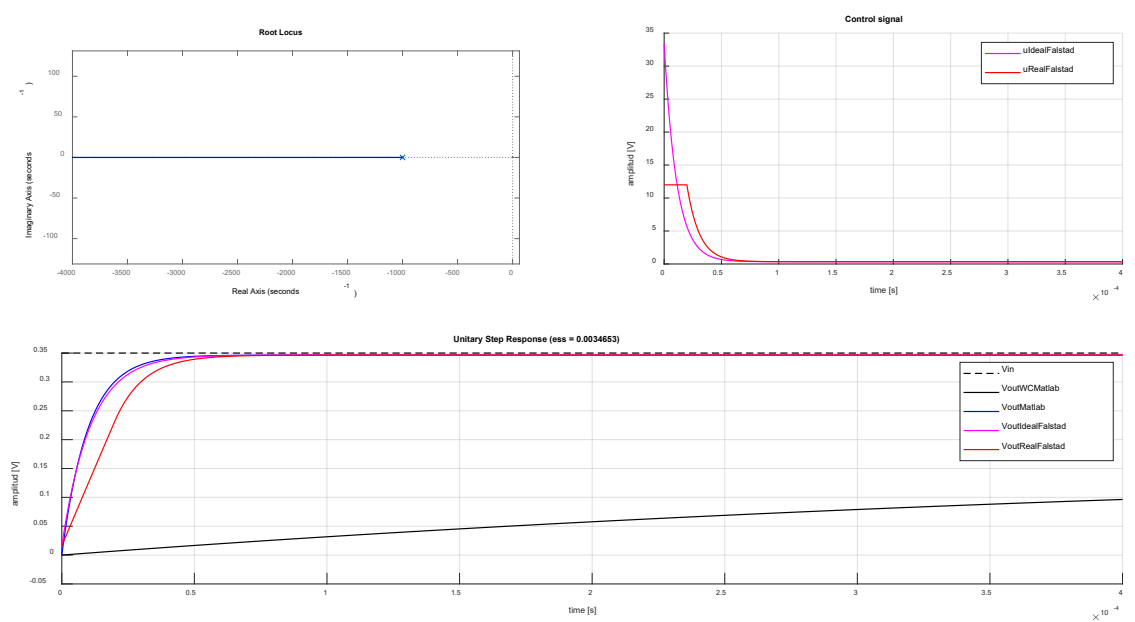


Fig. 102. Matlab vs Falstad Simulacions Control P Planta 3

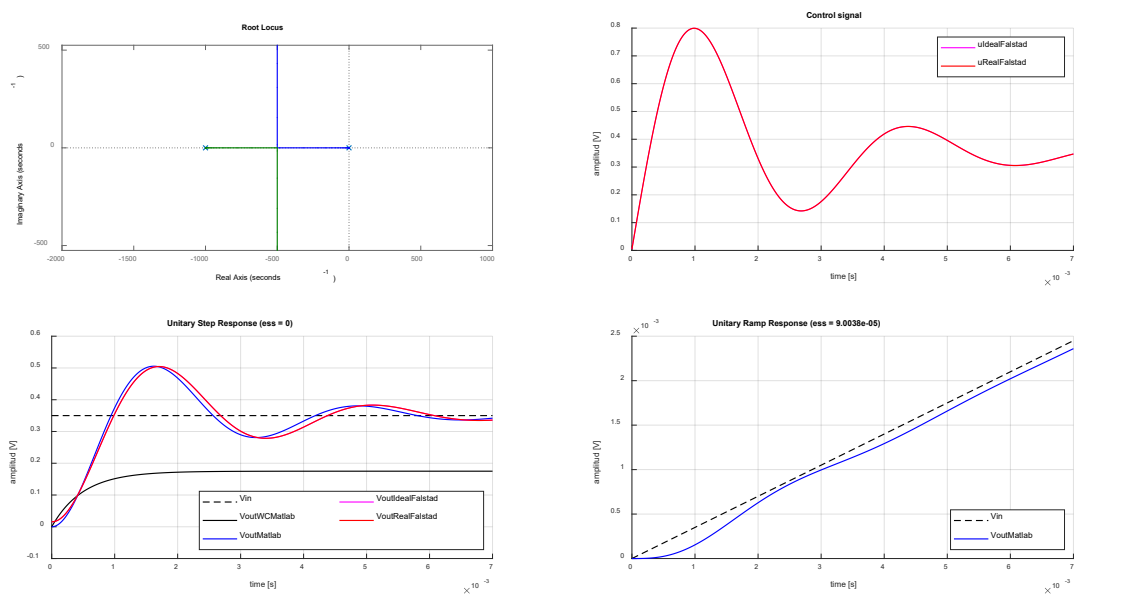


Fig. 103. Matlab vs Falstad Simulacions Control I Planta 3

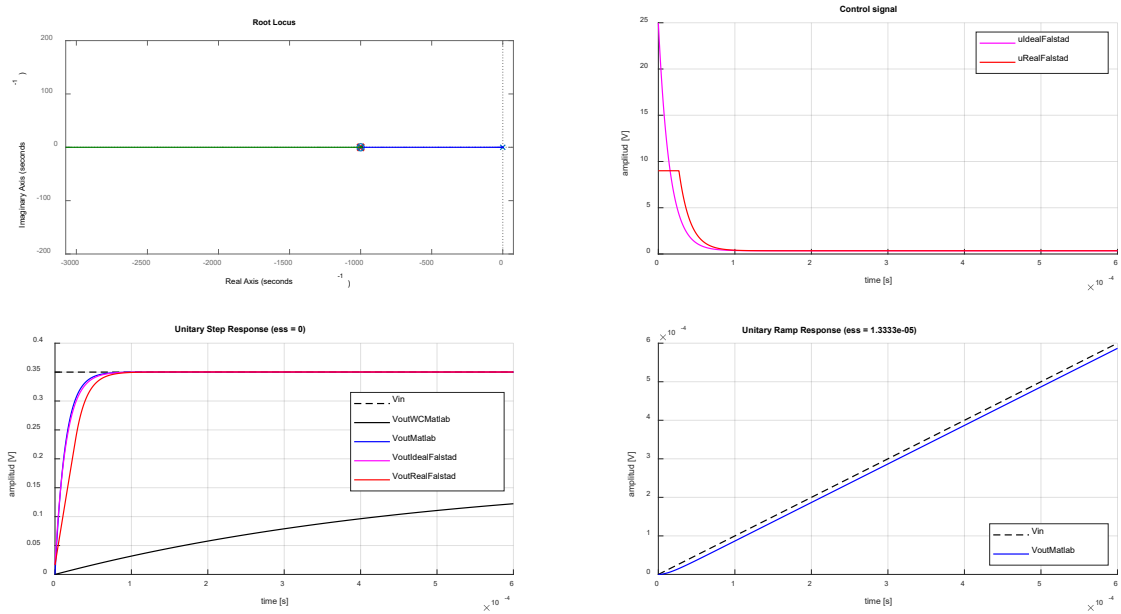


Fig. 104. Matlab vs Falstad Simulacions Control PI Planta 3

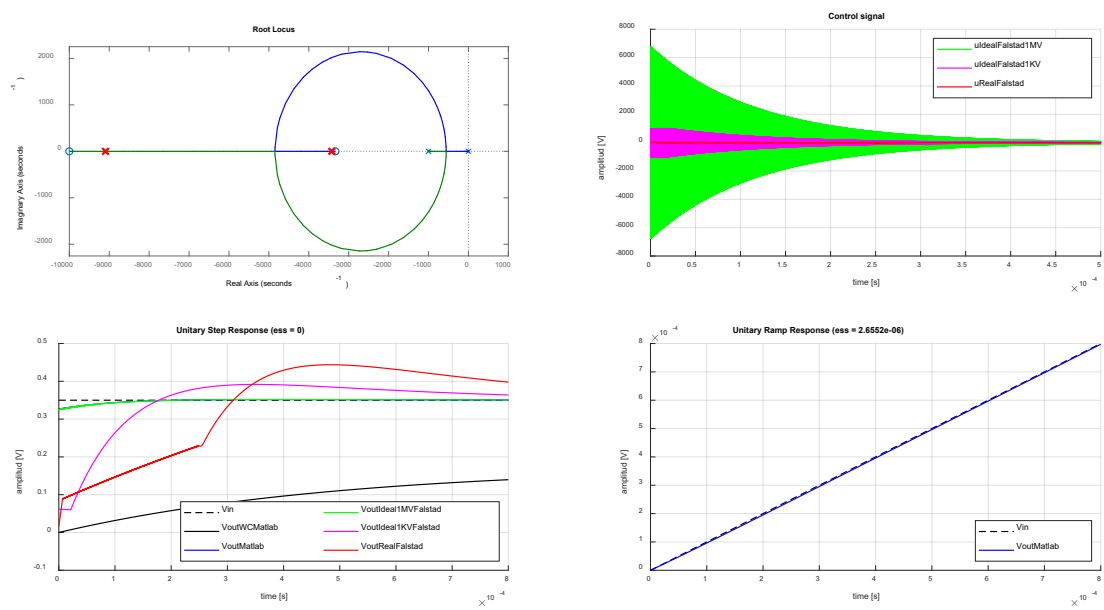


Fig. 105. Matlab vs Falstad Simulacions Control PID Planta 3

Analitzant les gràfiques obtingudes, es poden fer les següents observacions:

- En alguns casos, variar el guany del sistema, acció de control proporcional, mourà els pols enllaç tancat a la posició desitjada. En el cas de la *Fig. 102* s'ha desplaçat el pol real cap a l'esquerra, accelerant d'aquesta manera el t_s del nostre sistema. A l'augmentar el guany del sistema amb la variable K_p , també reduïm l' e_{ss} .
- En un entorn real, com el que es tindria en un laboratori, els amplificadors operacionals estaran alimentats per una tensió de ± 12 V. Per tant, a l'aplicar un controlador que contingui una acció derivativa, la tensió de sortida del operacional es veurà saturada. Per aquest motiu, en les *Fig.105* es pot observar tant en la gràfica de la senyal de control ($u(t)$) com en la senyal de sortida ($V_{out}(t)$), la no correspondència entre la simulació ideal, en el cas de l'entorn *Falstad*, utilitzant un amplificador operacional alimentat per una tensió de ± 1 MV, i la simulació real.
- La implementació d'un controlador *I* genera inestabilitat i retràs en el sistema. Com es pot observar en la *Fig.103* el lloc de les arrels es veu totalment alterat. Tot i això, en el cas que s'ha implantat, s'ha escollit valors que assegurin l'estabilitat del sistema, amb lo que eliminem l'error en estat estacionari (e_{ss}) per una entrada esglaó, però, com ja s'ha esmentat, retardem el temps d'assentament (t_s).
- En la *Fig.104* es pot observar la gran millora que proporciona aplicar un control *PI* envers d'un *I*. Comparant la gràfica de les arrels de tots dos sistemes, es pot observar la millora d'estabilitat que ofereix el control *PI*. A continuació, realitzant l'anàlisi d'estabilitat podrem justificar aquest fet. Com s'ha esmentat en l'*apartat 4.3* l'acció de control integral és complementa amb l'acció de control proporcional, beneficiant-se de totes dues accions. Instantàniament actuarà l'acció reguladora proporcional, mentre que l'acció de control integral actuarà durant un interval de temps, conegut com temps integral (T_i).
- Com s'ha esmentat amb anterioritat, la implantació d'un controlador que contingui una acció integral augmenta el tipus del sistema, en aquest cas a tipus 1, fet que comporta que s'elimini l' e_{ss} per una entrada esglaó i també, que l' e_{ss} per una entrada rampa sigui finit. Per aquest motiu, les *Fig. 103 – 104 – 105* integren la gràfica del senyal de sortida per a l'entrada d'una rampa unitària.

Un cop esmentades, a grans trets, les principals diferències entre els diferents controladors, en les següents taules es disposen de les dades analítiques més rellevants de la resposta de la primera planta amb els diversos controladors implantats obtingudes en l'entorn *Matlab*:

Control	Temps d'assentament (t_s) [s]	Sobre elongació (M_p) [%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p) [s]	e_{ss} (step) [V]	e_{ss} (ramp) [V]
	0.002	0	0	0	0.175	∞
P	0.000038733	0	0	0	0.0034653	∞
PD	-	-	-	-	-	-
I	0.0071	44.3235	0.50513	0.0017	0	0.000090038
PI	0.000052161	0	0	0	0	0.000013333
PID	0.00088809	0.4724	0.35165	0.00038487	0	0.0000026552

Taula 30. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35 V, Planta 3 més e_{ss} rampa unitària (Matlab)

I en l'entorn *Falstad* (amplificador operacional alimentat amb ± 12 V):

Control	Temps d'assentament (t_s) [s]	Sobre elongació (M_p) [%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p) [s]	e_{ss} (step) [V]
	0.002	0	0	0	0.175
P	0.005053	0	0	0	0.0035
PD	-	-	-	-	-
I	0.0075	44	0.5045	0.0017	0
PI	0.0000679	0	0	0	0
PID	0.001378	27	0.4438	0.0004837	0

Taula 31. Característiques resposta entrada esglaió, amplitud 0.35 V, Planta 3 (Falstad)

Com s'ha esmentat en l'anterior apartat, aplicar blocs de control pot modificar el lloc geomètric de les arrels, per tant, l'estabilitat, també es pot veure afectada. Per aquest motiu, hem realitzat l'anàlisi d'estabilitat per cadascun dels controladors, pel mètode clàssic i pel marge de disc. D'aquesta manera s'obté:

Marges clàssics				Marge de disc $D(\alpha, \sigma)$		
Controlador	Marge de guany (K_g) [dB]	Marge de fase (γ) [°]	Desviació (σ)	Mida del disc (α)	Marge de guany [ud]	Marge de fase [°]
-	∞	180	0	2	[0, ∞]	[-90, 90]
P	∞	90.573	0	2	[0, ∞]	[-90, 90]
PD	-	-	-	-	-	-
I	∞	28.0243	0	0.48507	[0.60961, 1.6404]	[-27.266, 27.266]
PI	∞	90	0	2	[0, ∞]	[-90, 90]
PID	∞	∞	0	1.9867	[0.0033301, 300.2949]	[-89.6184, 89.6184]

Taula 32. Marges estabilitat controladors Planta 3

En aquest cas, la implantació d'un controlador integral redueix significativament el marge de fase, el fa més proper a la inestabilitat, menys robust. Per lo contrari, el controlador PID manté el marge de guany i augmenta el marge de fase del sistema, fent-lo més robust a pertorbacions de fase.

En aquesta planta, el controlador P, amb la configuració establerta en la taula 28, és el que ens ofereix un major marge de disc.

6.1.4. Control quarta planta

Centrant-se en la millora de la quarta planta, partint del diagrama de blocs a aplicar:

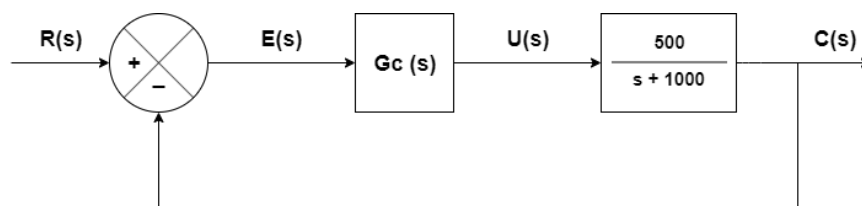


Fig. 106. Esquemàtic Bloc Control + Planta 4

En aquesta planta s'han aplicat tots els controladors esmentats en l'*apartat 4.6*, menys el controlador *PD*, sistema en llaç tancat no causal. Els controladors restants s'han dissenyat amb l'ajuda de l'aplicació *PID Tuner*, amb la que es pot modelar la resposta transitòria per una entrada esglaó.

D'aquesta manera s'han obtingut els següents blocs de control:

Controlador	K_p	K_i	K_d
<i>P</i>	47	-	-
<i>PD</i>	-	-	-
<i>I</i>	-	2200	-
<i>PI</i>	31	50000	-
<i>PID</i>	13.2	20000	0.00112

Taula 33. Controladors Planta 4

Un cop dissenyats els controladors de la quarta planta, per realitzar les simulacions en l'entorn *Falstad*, s'haurà de dimensionar el circuit electrònic equivalent a cadascun dels controladors dissenyats en la *Taula 33*.

Seguint el model introduït per *K.Ogata*, *Fig. 37* i la *Taula 13*, on es troben les equivalències dels sistemes de control amb el seu semblant electrònic, s'obté:

Controlador	$R1[\Omega]$	$R2[\Omega]$	$R3[\Omega]$	$R4[\Omega]$	$C1[F]$	$C2[F]$	K_p	K_i	K_d
<i>P</i>	1k	4k7	1k	10k	-	-	47	-	-
<i>PD</i>	-	-	-	-	-	-	-	-	-
<i>I</i>	1k	-	1k	2k2	-	1u	-	2200	-
<i>PI</i>	100	6k2	1k	500	-	100n	31	50000	-
<i>PID</i>	1k	5k6	1k	2k	100n	100n	13.2	20000	0.00112

Taula 34. Equivalència Control-Components Planta 4

Com en la primera fase, alhora de trobar l'equivalència envers la funció de transferència dels controladors i la funció de transferència del circuit electrònic equivalent, hi ha components prioritaris, amb menys marge de llibertat, com els condensadors. Per tant, el disseny s'ha centrat en fixar el valor dels condensadors, mitjançant les equacions establertes en la *Taula 14*, tenint en compte que aquests són no polaritzats, fet que redueix significativament la seva capacitància; i després, anar variant valors de resistències per obtenir el valor del controlador desitjat. També, s'ha tingut en compte que aquests components fossin econòmics i que tinguessin un bon *stock*.

Un cop determinats els controladors i els sistemes electrònics equivalents, es procedeix a realitzar les simulacions pertinents tant en l'entorn *Matlab* com en l'entorn *Falstad*. Els esquemes equivalents de tancar el llaç analògicament són els següents:

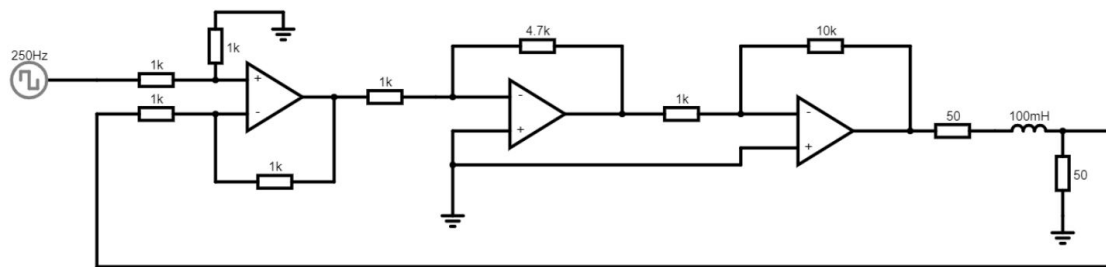


Fig. 107. Control Proporcional Planta 4

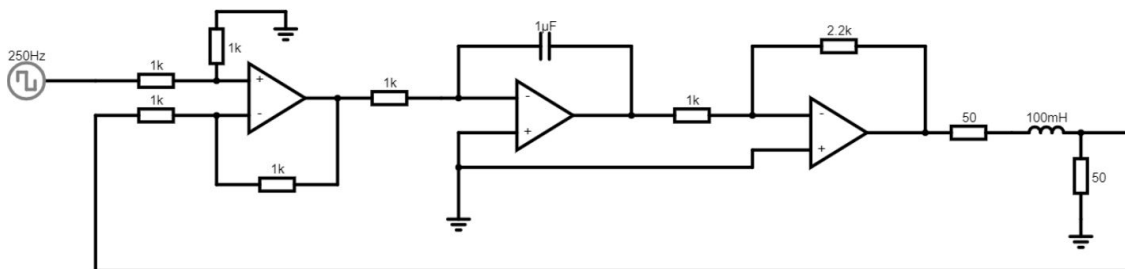


Fig. 108. Control Integral Planta 4

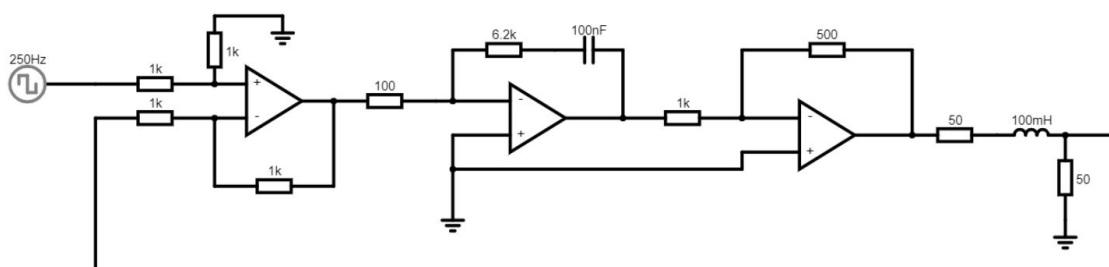


Fig. 109. Control Proporcional-Integral Planta 4

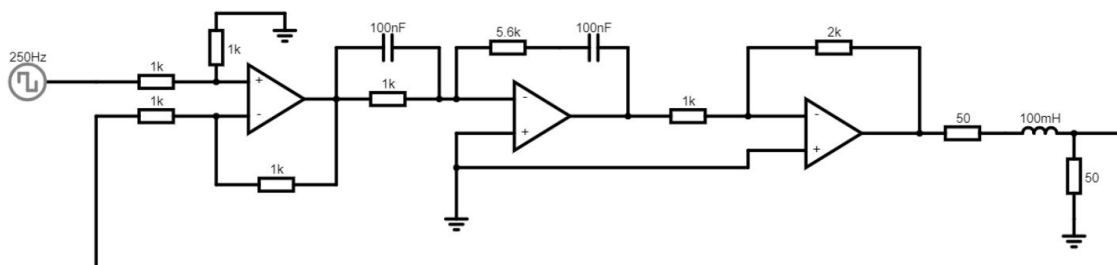


Fig. 110. Control Proporcional-Integral-Derivatiu Planta 4

Un cop realitzades les simulacions en tots dos entorns. S'obtenen les següents gràfiques:

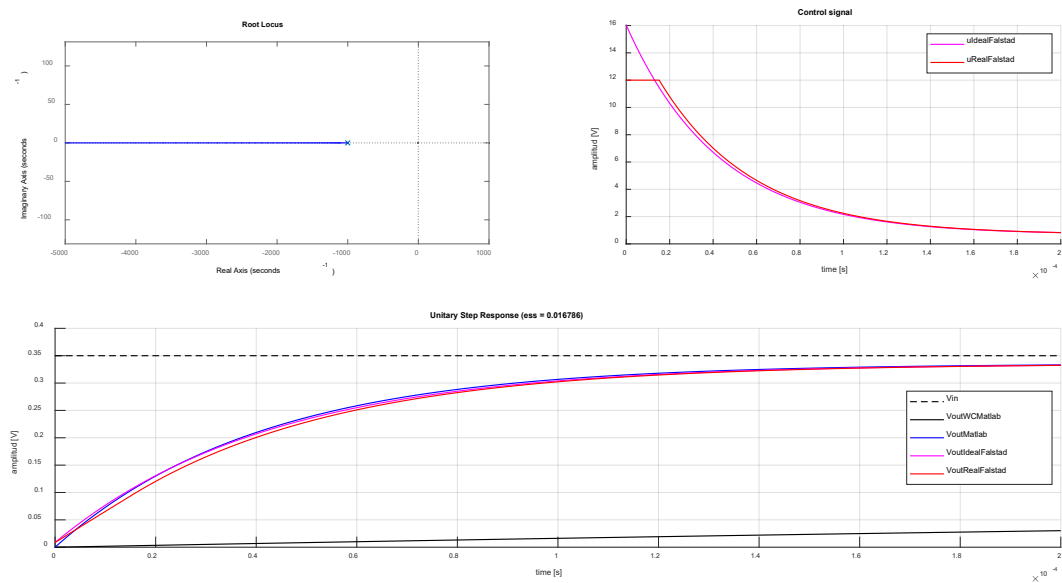


Fig. 111. Matlab vs Falstad Simulacions Control P Planta 4

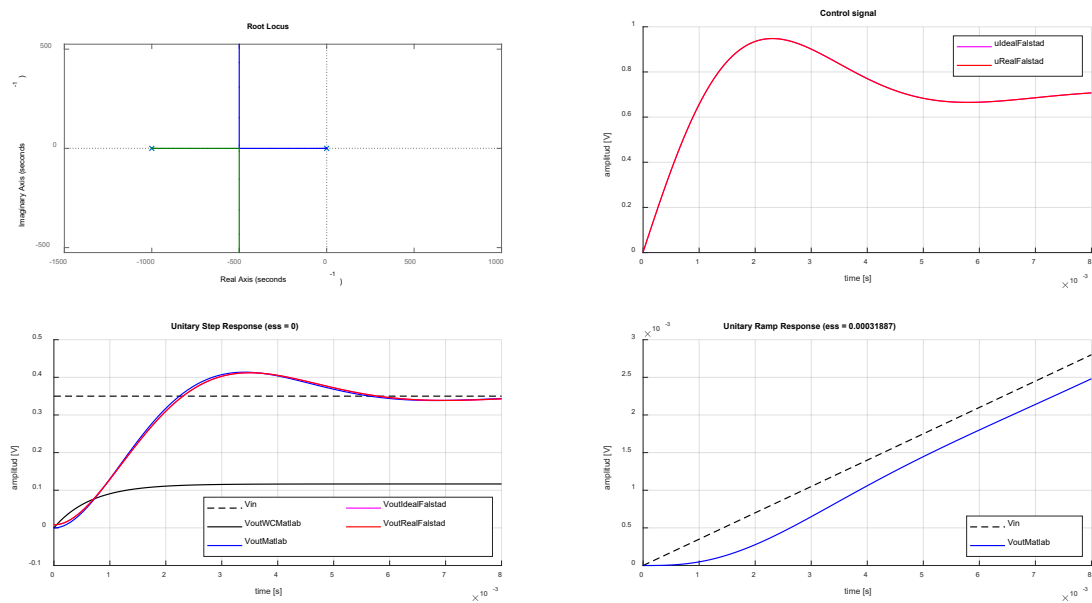


Fig. 112. Matlab vs Falstad Simulacions Control I Planta 4

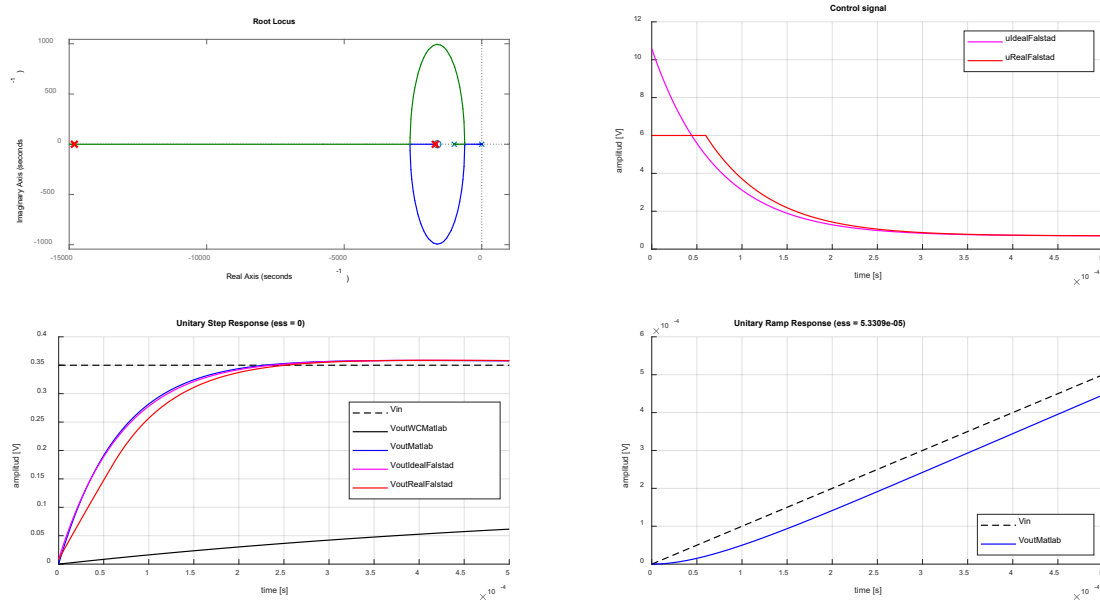


Fig. 113. Matlab vs Falstad Simulacions Control PI Planta 4

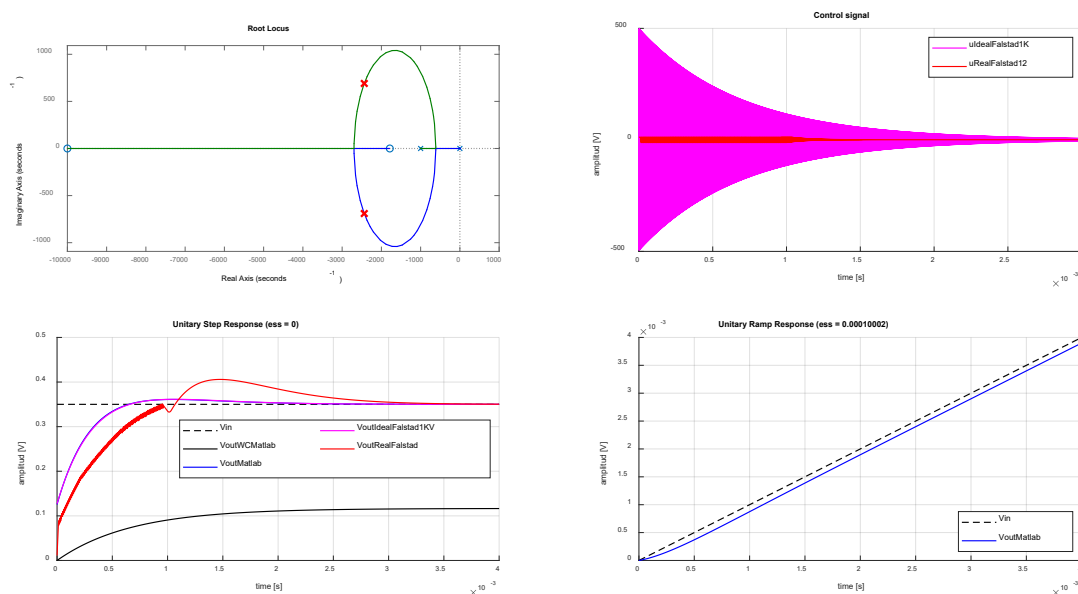


Fig. 114. Matlab vs Falstad Simulacions Control PID Planta 4

Analitzant les gràfiques obtingudes, es poden fer les següents observacions:

- En alguns casos, variar el guany del sistema, acció de control proporcional, mourà els pols enllaç tancat a la posició desitjada. En el cas de la Fig. 111 s'ha desplaçat el pol real cap a l'esquerra, accelerant d'aquesta manera el t_s del nostre sistema. A l'augmentar el guany del sistema amb la variable K_p , també reduïm l' e_{ss} .

- En un entorn real, com el que es tindria en un laboratori, els amplificadors operacionals estaran alimentats per una tensió de ± 12 V. Per tant, a l'aplicar un controlador que contingui una acció derivativa, la tensió de sortida del operacional es veurà saturada. Per aquest motiu, en les Fig. 114 es pot observar tant en la gràfica de la senyal de control ($u(t)$) com en la senyal de sortida ($V_{out}(t)$), la no correspondència entre la simulació ideal, en el cas de l'entorn *Falstad*, utilitzant un amplificador operacional alimentat per una tensió de ± 1 MV, i la simulació real.
- De la mateixa manera, la gràfica de la senyal de control de la Fig. 113, que pertany al bloc de control *PI*, presenta una saturació, però en aquest cas, no en la sortida del bloc de control, sinó en el primer operacional del bloc. Per aquest fet, la sortida del bloc és veu limitada.

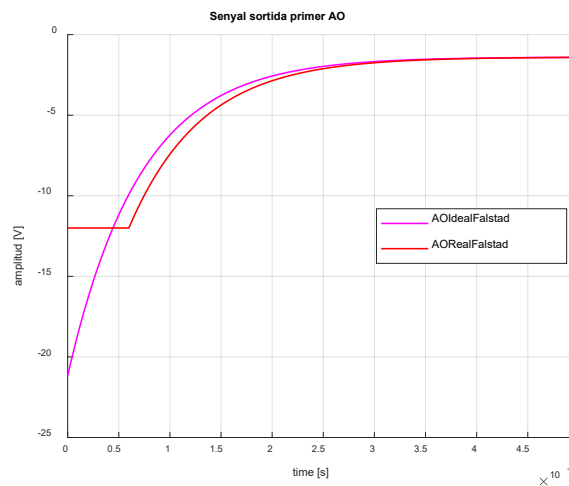


Fig. 115. Senyal sortida primer AO Planta 4 Control PI

- La implementació d'un controlador *I* genera inestabilitat i retràs en el sistema. Com es pot observar en la Fig. 112 el lloc de les arrels es veu totalment alterat. Tot i això, en el cas que s'ha implantat, s'ha escollit valors que assegurin l'estabilitat del sistema, amb lo que eliminem l'error en estat estacionari (e_{ss}) per una entrada esglaó, però, com ja s'ha esmentat, retardem el temps d'assentament (t_s).
- En la Fig. 113 es pot observar la gran millora que proporciona aplicar un control *PI* envers d'un *I*. Comparant la gràfica de les arrels de tots dos sistemes, es pot observar la millora d'estabilitat que ofereix el control *PI*. A continuació, realitzant l'anàlisi d'estabilitat podrem justificar aquest fet. Com s'ha esmentat en l'apartat 4.3, l'acció de control integral és complementa amb l'acció de control proporcional, beneficiant-se de totes dues accions. Instantàniament actuarà l'acció reguladora proporcional, mentre que l'acció de control integral actuarà durant un interval de temps, conegut com temps integral (T_i).
- Com s'ha esmentat amb anterioritat, la implantació d'un controlador que contingui una acció integral augmenta el tipus del sistema, en aquest cas a *tipus 1*, fet que comporta que s'elimini l' e_{ss} per una entrada esglaó i també, que l' e_{ss} per una entrada rampa sigui finit. Per aquest motiu, les Fig. 112 – 113 – 114 integren la gràfica del senyal de sortida per a l'entrada d'una rampa unitària.

Un cop esmentades, a grans trets, les principals diferències entre els diferents controladors, en les següents taules es disposen de les dades analítiques més rellevants de la resposta de la primera planta amb els diversos controladors implantats obtingudes en l'entorn *Matlab*:

Control	Temps d'assentament (t_s) [s]	Sobre elongació (M_p) [%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p) [s]	e_{ss} (step) [V]	e_{ss} (ramp) [V]
	0.0026	0	0	0	0.233	∞
P	0.00015968	0	0	0	0.016786	∞
PD	-	-	-	-	-	-
I	0.0079	18.1996	0.4136986	0.0034	0	0.00031887
PI	0.00056337	2.3878	0.3583573	0.00039485	0	0.000053309
PID	0.0018	3.1308	0.3609578	0.0011	0	0.00010002

Taula 35. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35 V, Planta 4 més e_{ss} rampa unitària (Matlab)

I en l'entorn *Falstad* (amplificador operacional alimentat amb $\pm 12V$):

Control	Temps d'assentament (t_s) [s]	Sobre elongació (M_p) [%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p) [s]	e_{ss} (step) [V]
	0.0025	0	0	0	0.233
P	0.00016	0	0	0	0.016786
PD	-	-	-	-	-
I	0.0081	18	0.4121	0.0035	0
PI	0.000565	2	0.3587	0.0004227	0
PID	0.0028	16	0.4059	0.0015	0

Taula 36. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35 V, Planta 4 (Falstad)

Com s'ha esmentat en l'anterior apartat, aplicar blocs de control pot modificar el lloc geomètric de les arrels, per tant, l'estabilitat, també es pot veure afectada. Per aquest motiu, hem realitzat l'anàlisi d'estabilitat per cadascun dels controladors, pel mètode clàssic i pel marge de disc. D'aquesta manera s'obté:

Marges clàssics				Marge de disc $D(\alpha, \sigma)$		
Controlador	Marge de guany (K_g) [dB]	Marge de fase (γ) [°]	Desviació (σ)	Mida del disc (α)	Marge de guany [ud]	Marge de fase [°]
-	∞	∞	0	2	[0, ∞]	[-90, 90]
P	∞	92.4391	0	2	[0, ∞]	[-90, 90]
PD	-	-	-	-	-	-
I	∞	49.9158	0	0.86066	[0.39828, 2.5108]	[-46.5675, 46.5675]
PI	∞	87.759	0	1.8735	[0.032653, 30.6252]	[-86.2596, 86.2596]
PID	∞	118.7092	0	1.8964	[0.026578, 37.6244]	[-86.955, 86.955]

Taula 37. Marges estabilitat controladors Planta 4

En aquest cas, la implantació d'un controlador integral redueix significativament el marge de fase, el fa més proper a la inestabilitat, menys robust. Per lo contrari, el controlador *PID* manté el marge de guany i augmenta el marge de fase del sistema, fent-lo més robust a pertorbacions de fase.

En aquesta planta, el controlador *P*, amb la configuració establerta en la *taula 33*, és el que ens ofereix un major marge de disc.

6.1.5. Control cinquena planta

Centrant-se en la millora de la quarta planta, partint del diagrama de blocs a aplicar:

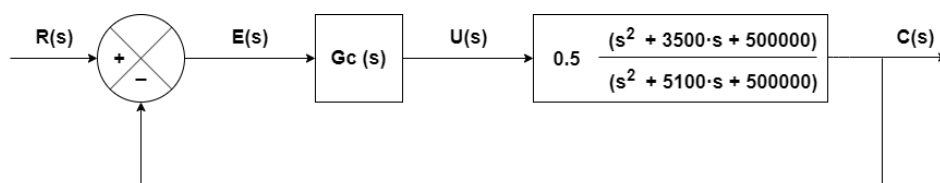


Fig. 116. Esquemàtic Bloc Control + Planta 5

En aquesta planta s'han aplicat tots els controladors esmentats en l'apartat 4.6, menys els controladors PD i PID, sistema en llaç tancat no causal. Els controladors restants s'han dissenyat amb l'ajuda de l'aplicació PID Tuner, amb la que es pot modelar la resposta transitòria per una entrada esglaó.

D'aquesta manera s'han obtingut els següents blocs de control:

Controlador	K_p	K_i	K_d
P	100	-	-
PD	-	-	-
I	-	1800	-
PI	0.0094	2000	-
PID	-	-	-

Taula 38. Controladors Planta 5

Un cop dissenyats els controladors de la cinquena planta, per realitzar les simulacions en l'entorn *Falstad*, s'haurà de dimensionar el circuit electrònic equivalent a cadascun dels controladors dissenyats en la Taula 38.

Seguint el model introduït per K.Ogata, Fig. 37 i la Taula 13, on es troben les equivalències dels sistemes de control amb el seu semblant electrònic, s'obté:

Controlador	$R1[\Omega]$	$R2[\Omega]$	$R3[\Omega]$	$R4[\Omega]$	$C1[F]$	$C2[F]$	K_p	K_i	K_d
P	1k	10k	1k	10k	-	-	100	-	-
PD	-	-	-	-	-	-	-	-	-
I	1k	-	1k	1k8	-	1u	-	1800	-
PI	5k	4k7	10k	100	-	1n	0.0094	2000	-
PID	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Taula 39. Equivalència Control-Components Planta 5

Com en la primera fase, alhora de trobar l'equivalència envers la funció de transferència dels controladors i la funció de transferència del circuit electrònic equivalent, hi ha components prioritaris, amb menys marge de llibertat, com els condensadors. Per tant, el disseny s'ha centrat en fixar el valor dels condensadors, mitjançant les equacions establertes en la Taula 14, tenint en compte que aquests són no polaritzats, fet que redueix significativament la seva capacítància;

i després, anar variant valors de resistències per obtenir el valor del controlador desitjat. També, s'ha tingut en compte que aquests components fossin econòmics i que tinguessin un bon *stock*.

Un cop determinats els controladors i els sistemes electrònics equivalents, es procedeix a realitzar les simulacions pertinents tant en l'entorn *Matlab* com en l'entorn *Falstad*. Els esquemes equivalents de tancar el llaç analògicament són els següents:

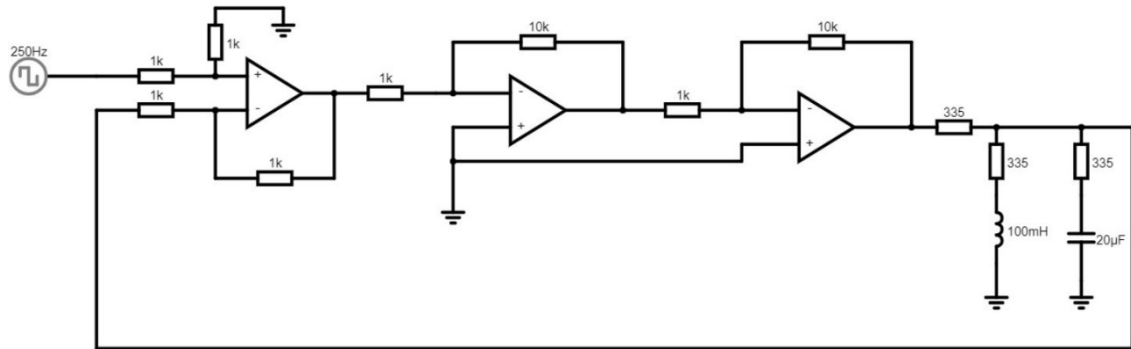


Fig. 117. Control Proporcional Planta 5

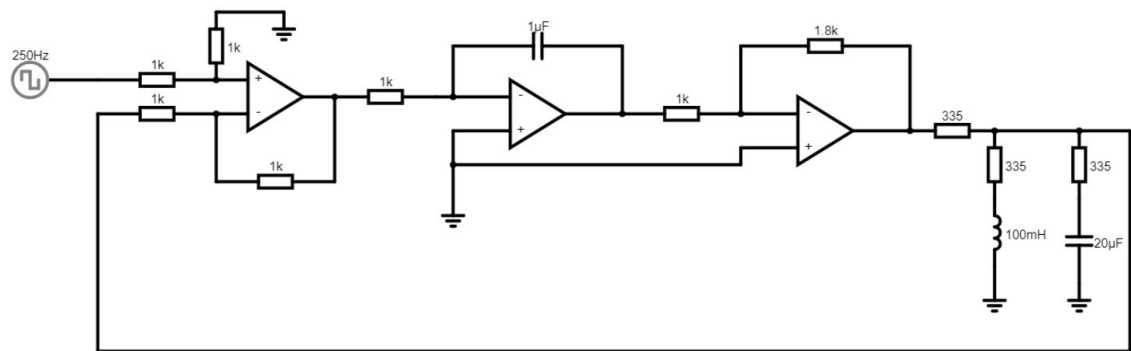


Fig. 118. Control Integral Planta 5

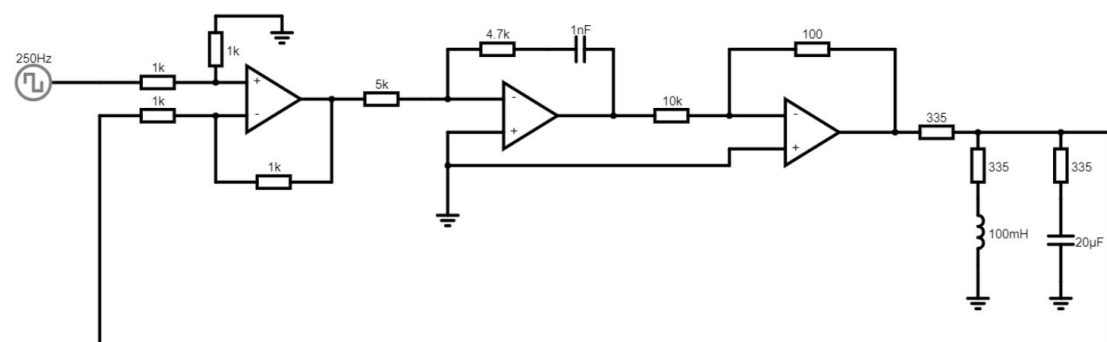


Fig. 119. Control Proporcional-Integral Planta 5

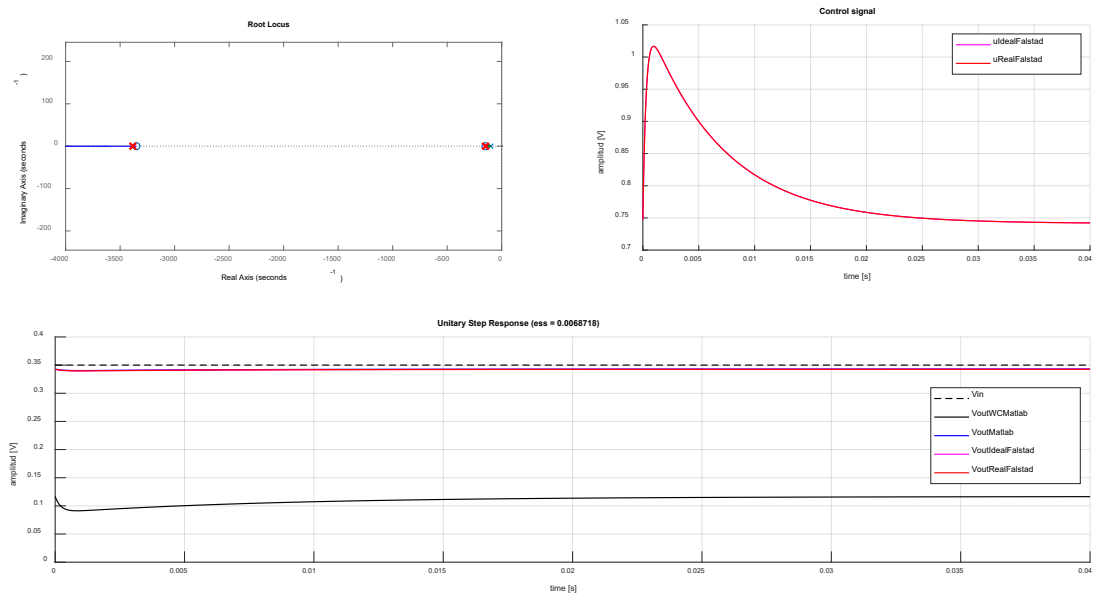


Fig. 120. Matlab vs Falstad Simulacions Control P Planta 5

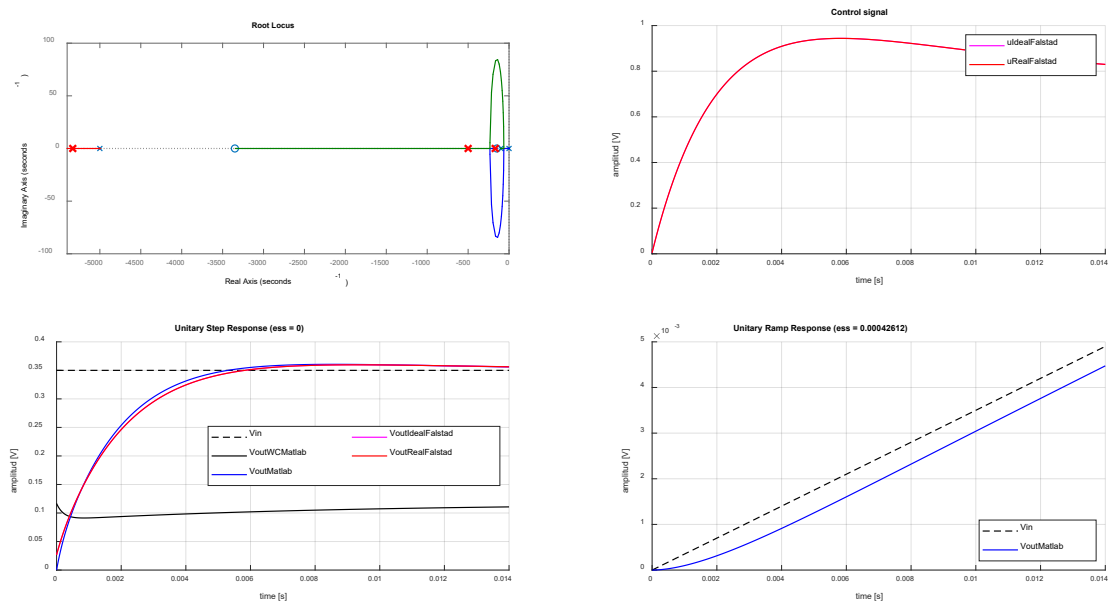


Fig. 121. Matlab vs Falstad Simulacions Control I Planta 5

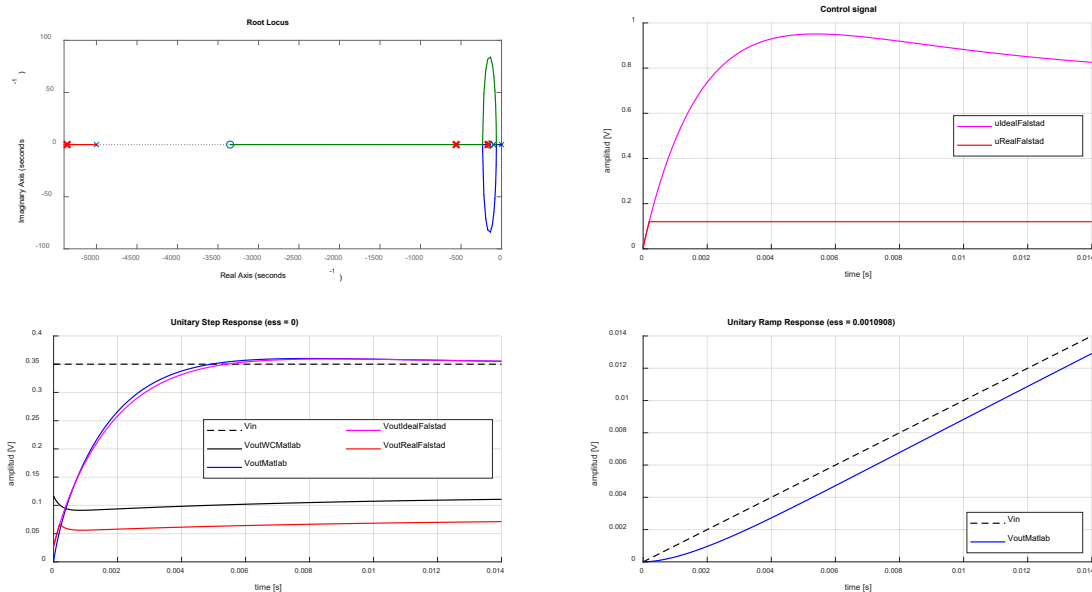


Fig. 122. Matlab vs Falstad Simulacions Control PI Planta 5

Analitzant les gràfiques obtingudes, es poden fer les següents observacions:

- En alguns casos, variar el guany del sistema, acció de control proporcional, mourà els pols enllaç tancat a la posició desitjada. En el cas de la Fig. 120 s'han desplaçat els pols reals enllaç tancat cap a l'esquerra, accelerant d'aquesta manera el t_s del nostre sistema. A l'augmentar el guany del sistema amb la variable K_p , també reduïm l' e_{ss} .
- En un entorn real, com el que es tindria en un laboratori, els amplificadors operacionals estaran alimentats per una tensió de ± 12 V. En el cas de la Fig. 122 l'acció de control integral es tan gran, que el amplificador operacional situat en la primera etapa, es veu saturat, per aquesta raó, la tensió de sortida de la simulació real difereix tant de la simulació ideal.

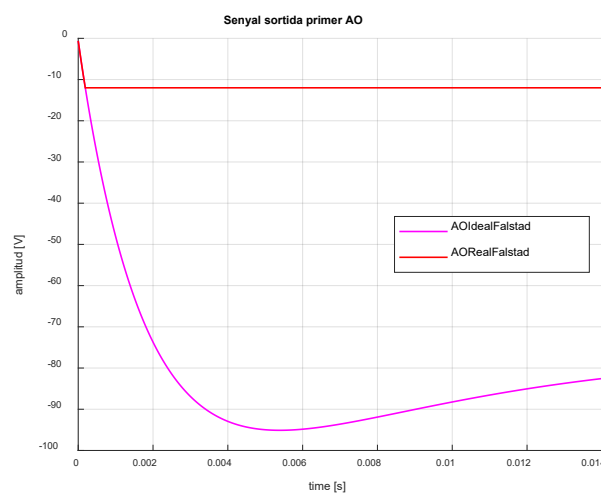


Fig. 123. Senyal sortida primer AO Planta 5 Control PI

- La implementació d'un controlador I genera inestabilitat i retràs en el sistema. Com es pot observar en les Fig. 121 el lloc de les arrels es veu totalment alterat. Tot i això, en el cas que s'ha implantat, s'ha escollit valors que assegurin l'estabilitat del sistema, amb lo que eliminem l'error en estat estacionari (e_{ss}) per una entrada esglaó, però, com ja s'ha esmentat, retardem el temps d'assentament (t_s).
- Com s'ha esmentat amb anterioritat, la implantació d'un controlador que contingui una acció integral augmenta el tipus del sistema, en aquest cas a *tipus 1*, fet que comporta que s'elimini l' e_{ss} per una entrada esglaó i també, que l' e_{ss} per una entrada rampa sigui finit. Per aquest motiu, les Fig. 121 - 122 integren la gràfica del senyal de sortida per a l'entrada d'una rampa unitària.

Un cop esmentades, a grans trets, les principals diferències entre els diferents controladors, en les següents taules es disposen de les dades analítiques més rellevants de la resposta de la primera planta amb els diversos controladors implantats obtingudes en l'entorn *Matlab*:

Control	Temps d'assentament (t_s) [s]	Sobre elongació (M_p) [%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p) [s]	e_{ss} (step) [V]	e_{ss} (ramp) [V]
	0.0359	0	0	0	0.233	∞
P	0.0277	0	0	0	0.0068718	∞
PD	-	-	-	-	-	-
I	0.0079	3.0282	0.3605987	0.0087	0	0.00042612
PI	0.0120	2.8867	0.3601	0.0081	0	0.0010908
PID	-	-	-	-	-	-

Taula 40. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35 V, Planta 5 més e_{ss} rampa unitària (Matlab)

I en l'entorn *Falstad* (amplificador operacional alimentat amb $\pm 12V$):

Control	Temps d'assentament (t_s) [s]	Sobre elongació (M_p) [%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p) [s]	e_{ss} (step) [V]
	0.035	0	0	0	0.2275
P	0.028	0	0	0	0.0074
PD	-	-	-	-	-
I	0.0132	3	0.3597	0.0093	0
PI	0.00117	0	0	0	0.2788
PID	-	-	-	-	-

Taula 41. Característiques resposta entrada esglaó, amplitud 0.35 V, Planta 5 (Falstad)

Com s'ha esmentat en l'anterior apartat, aplicar blocs de control pot modificar el lloc geomètric de les arrels, per tant, l'estabilitat, també es pot veure afectada. Per aquest motiu, hem realitzat l'anàlisi d'estabilitat per cadascun dels controladors, pel mètode clàssic i pel marge de disc. D'aquesta manera s'obté:

Marges clàssics				Marge de disc $D(\alpha, \sigma)$		
Controlador	Marge de guany (K_g) [dB]	Marge de fase (γ) [°]	Desviació (σ)	Mida del disc (α)	Marge de guany [ud]	Marge de fase [°]
-	∞	∞	0	4.0889	[0, ∞]	[-127.8705, 127.8705]
P	∞	∞	0	2.0816	[0, ∞]	[-92.2915, 92.2915]
PD	-	-	-	-	-	-
I	∞	89.0206	0	1.8297	[0.044463, 22.4906]	[-84.9083, 84.9083]
PI	∞	89.9666	0	1.8439	[0.040612, 24.6233]	[-85.3488, 85.3488]
PID	-	-	-	-	-	-

Taula 42. Marges estabilitat controladors Planta 4

En aquest cas, la implantació d'un controlador I o un PI produeix el mateix marge de fase, prop dels 90° . El controlador P proporciona els millors marges clàssics d'estabilitat.

En aquesta planta, el controlador P , amb la configuració establerta en la *taula 38*, és el que ens ofereix un major marge de disc.

7. Discretització

Encara que no és objecte d'aquest treball, es farà una breu pinzellada sobre els *processos discrets*. Amb motiu d'aplicació dels controladors en un microprocessador, s'haurà de traslladar tots els conceptes clàssics de control a un nou escenari en el que els senyals no són coneguts en tots els instants de temps, sinó que són coneguts en intervals de temps, mostres. A aquests sistemes, se'ls coneix com *sistemes de temps discret*.

Els controladors seran substituïts per un microprocessador (μP) que adquireix la magnitud d'error (E) pels ports d'entrada (ADC) i envia l'acció de control (U) a la planta a través dels ports de sortida (DAC).

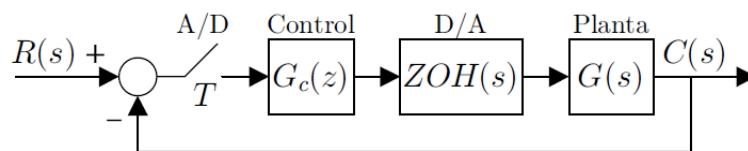


Fig. 124. Sistema discret genèric amb realimentació unitària

L'operació del microprocessador està governada per un rellotge (intern o extern), que marca els instants en els quals s'executa les sentències del programa. Aquest marcarà la freqüència de les lectures ADC i escriptures DAC . La freqüència màxima del microprocessador és indicada pel fabricant, en aquest projecte s'ha optat per utilitzar la placa *Arduino Due* que presenta una freqüència màxima de mostreig d' 1 MHz . Per tant, el temps de mostreig T_s mínim que és podrà utilitzar serà d' $1\text{ }\mu\text{s}$.

7.1. Període de mostreig (T_s)

El comportament dels sistemes variarà segons el període de mostreig escollit. Fins i tot, un mateix sistema pot ser estable o inestable, depenent d'aquest.

Per escollir un període mostreig apropiat, per evitar l'*aliasing*, superposició de baixes i altes freqüències, el que es tradueix en impossibilitat de recuperar la senyal original; s'utilitzarà el *Teorema de mostreig de Shannon-Nyquist*.

Segons aquest, per a digitalitzar un senyal analògic i poder recuperar-lo amb la màxima fidelitat possible, es requereix que el senyal analògic sigui mostrejat amb almenys dues vegades la seva freqüència màxima:

$$\omega_s \geq 2\omega_m$$

On ω_s és la freqüència de mostreig i ω_m és l'amplada de banda de $f(t)$. Per tant, en termes del període de mostreig, tenint en compte que $T_s = 2\pi/\omega_s$, s'obté:

$$T_s < \frac{\pi}{\omega_m}$$

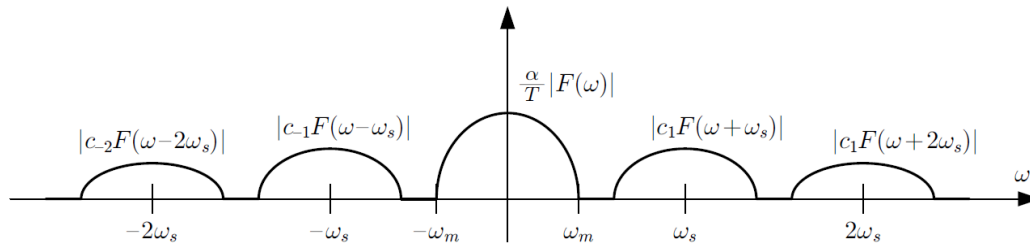


Fig. 125. Espectre en freqüència d'una senyal genèrica $f(t)$ sense aliasing

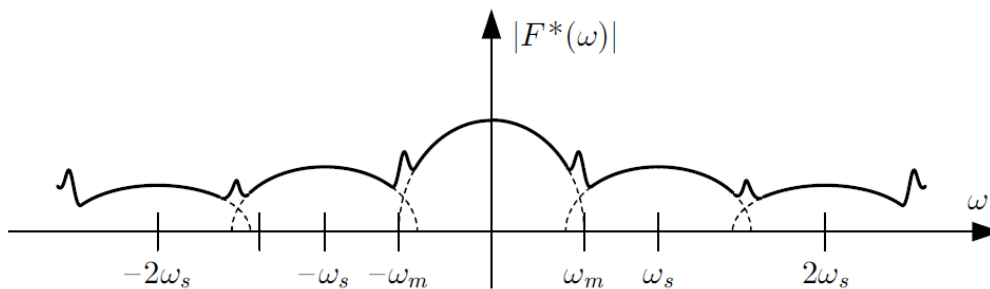


Fig. 126. Espectre en freqüència d'una senyal genèrica $f(t)$ amb aliasing

Si es mostreja per sota del límit del *teorema de Shannon-Nyquist*, es perd informació del contingut d'alta freqüència; i els senyals d'alta freqüència, es poden observar amb una freqüència inferior a la que realment tenen.

Per a determinar la freqüència de mostreig ω_s i assegurar que no es produeix *aliasing*, s'haurà de calcular l'amplada de banda del senyal o sistema a partir del seu espectre; o com s'ha realitzat en aquest cas, a partir del *diagrama de Bode*.

Com s'ha esmentat en l'*apartat 6.1.1* d'aquest projecte, l'amplada de banda és el rang de freqüència en el qual la magnitud de $G(j\omega)$ es troba 3 dB per damunt de la magnitud de freqüència zero $G(0)$. Aquest mètode es pot aplicar al sistemes de *tipus zero* per trobar el valor d'amplada de banda.

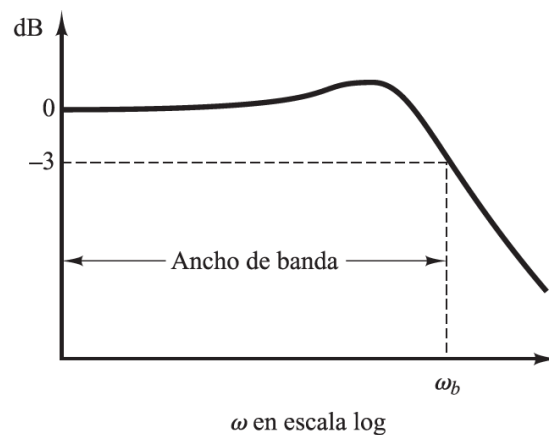


Fig. 127. Amplada de banda (ω_m) sistemes tipus 0

Per a sistemes de *tipus superior a zero*, es diferencien dos casos diferents:

- **Llaç tancat amb pols objectius complexos conjugats.** En aquest cas, trobarem l'amplada de banda mitjançant la freqüència natural no amortida (ω_n) del pol objectiu en llaç tancat. Per tant, segons el teorema de *Shannon-Nyquist*:

$$\omega_s \geq 2\omega_n$$

- **Llaç tancat amb pols objectius reals, negatius i diferents.** En aquest cas, per determinar l'amplada de banda s'haurà d'analitzar la resposta en freqüència del sistema mitjançant *el diagrama de Bode*. Per una determinada freqüència, l'amplitud, en escala absoluta, serà pràcticament insignificant, molt propera a zero. Aquesta freqüència serà fixada com l'amplada de banda ω_m (il·lustrat en la Fig. 128). L'amplada de banda tindrà cues que aniran baixant. Com en aquest cas, els pols objectius del sistema no són complexos conjugats, aquesta baixada serà suau, i no sempre l'amplitud absoluta serà exactament zero. Per això, a criteri de dissenyador s'escollirà gràficament l'amplada de banda. Depenent d'aquesta, tindrem major o menor quantitat d'*aliasing*.

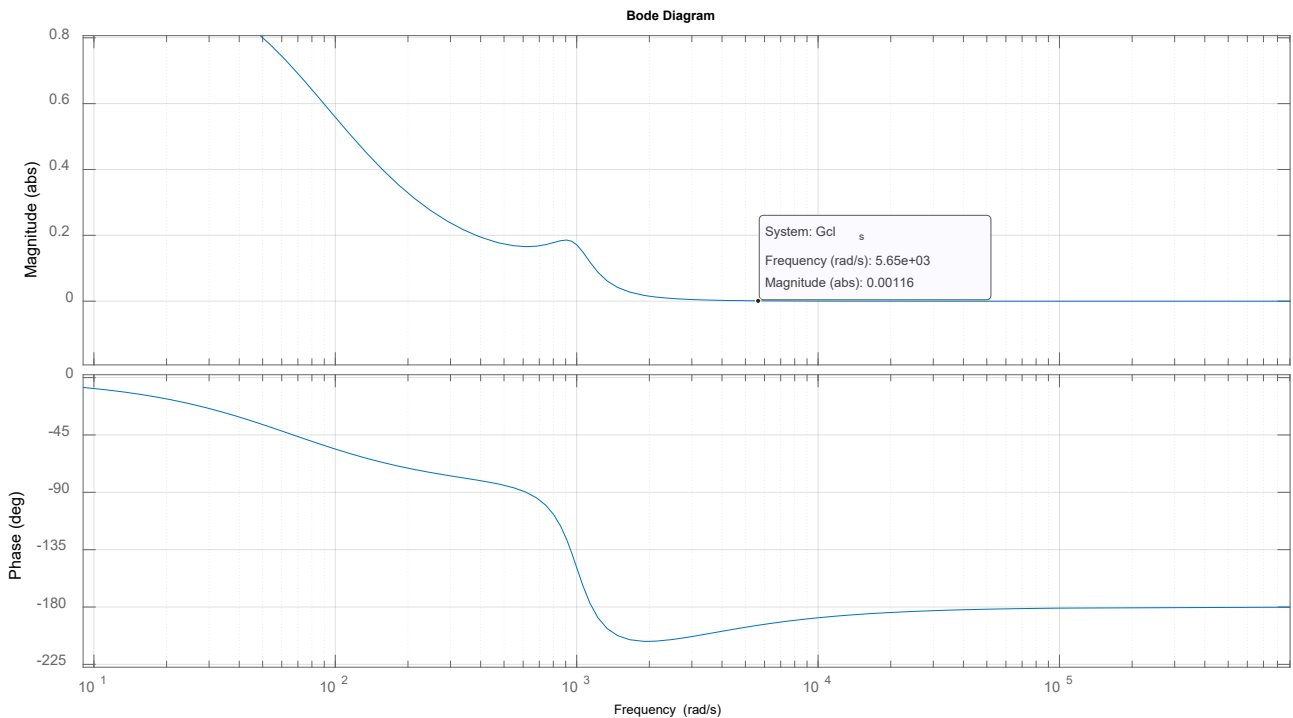


Fig. 128. Diagrama de Bode Controlador I Planta 1

7.2. Reconstrucció

A partir d'un senyal mostrejat es pot reconstruir la funció contínua original utilitzant un filtre. El procés de reconstrucció introdueix un error degut a l'*aliasing* i al tipus del filtre. Per a minimitzar aquest error s'ha d'escollir molt bé la freqüència de mostreig.

Els filtres utilitzats per reconstruir funcions temporals a partir de valors mostrejats s'anomenen retenidors o *holders*.

En aquest projecte, com en la majoria de casos pràctics, s'utilitzarà el retenidor d'ordre zero, més conegut com *zero-order holder (ZOH)*.

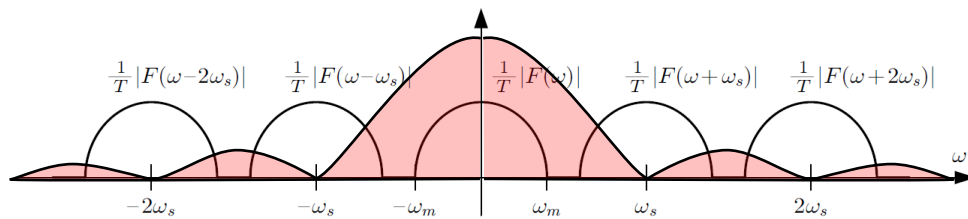


Fig. 129. Retenidor d'ordre zero

El retenidor d'ordre zero utilitza un valor constant entre un període de mostreig i el següent. Per tant, la reconstrucció feta per aquest, és una funció no contínua, o contínua a trams, amb salts finits cada període de mostreig.

$$f_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ f(0) & \text{si } 0 \leq t < T \\ f(T) & \text{si } T \leq t < 2T \\ f(2T) & \text{si } 2T \leq t < 3T \\ \dots & \\ f(nT) & \text{si } nT \leq t < nT + T \end{cases}$$

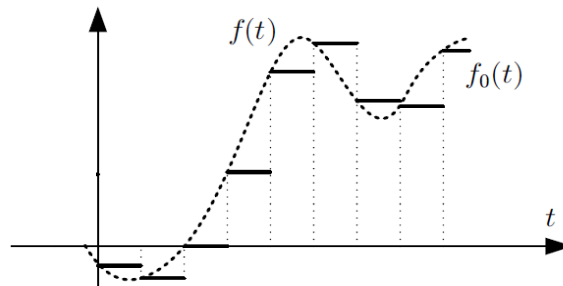


Fig. 130. Reconstrucció retenidor d'ordre zero

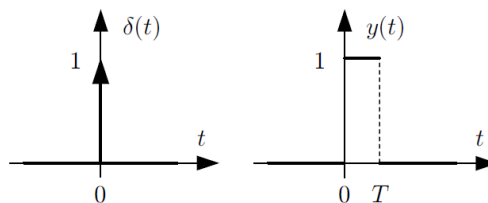


Fig. 131. Retenidor d'ordre zero.

L'expressió temporal del ZOH és:

$$y(t) = u(t) - u(t - T)$$

El ZOH no viola el principi de causalitat, l'efecte (sortida) és posterior a la causa (entrada). Per la transformada de *Laplace* del ZOH és:

$$ZOH(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

7.3. Transformada Z

La *transformada Z* d'una funció temporal és igual a la transformada de *Laplace* d'aquesta, mostrejada idealment, però amb un últim canvi de variable, $z = e^{sT}$.

Per tant, donada la transformada de *Laplace* d'una funció mostrejada idealment genèrica:

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-snT}$$

Realitzant el canvi de variable $z = e^{sT}$, s'obté:

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$$

Per a un sistema genèric com el que presenta la Fig. 131, és pot expressar la funció de transferència com:

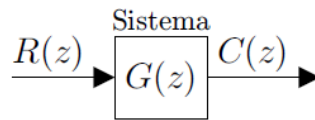


Fig. 132. Sistema genèric en el domini de les Z

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots}{b_0 + b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 + \dots}$$

On les arrels del polinomi del numerador seran els zeros de la funció de transferència Z; mentre les arrels del polinomi del denominador seran els pols.

Com en el domini de *Laplace*, les funcions de transferència Z de sistemes físics, tenen major o igual número de pols que de zeros, principi de causalitat.

Per calcular la *transformada de Z*, s'ha optat pel mètode computacional que ofereix *Matlab*. A partir de la funció **c2d(sys,Ts,'Holder')** facilitada per *Control System Toolbox*, s'obté de manera quasi instantània la *transformada Z*, introduint el sistema a digitalitzar, el temps de mostreig i el retenidor emprat, com ja s'ha comentat anteriorment, el ZOH.

7.3.1. Transformada inversa de Z

A l'hora de realitzar la *transformada inversa de Z* s'ha de tenir en compte que donat un període de mostreig T_s :

- La *transformada inversa de Z* no és única, existeixen infinites funcions contínues causals $f(t)$ que comparteixen la mateixa *transformada Z*.
- Totes les funcions contínues que posseeixin valors idèntics en els instants de mostreig, tindran la mateixa *transformada Z*.

Ja que l'objectiu principal de la digitalització és implantar el bloc de control en un microprocessador, s'ha optat per utilitzar el mètode computacional de les equacions en diferències, aquest permet implantar els controladors digitals en llenguatges de programació.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Donat un sistema genèric com el de dalt, el procediment a seguir per expressar la funció de transferència en equacions en diferències és el següent:

- a) Expressar la funció de transferència de manera que els termes en z dels polinomis tinguin exponents negatius.
- b) Multiplicar $X(z)$ pel numerador i $Y(z)$ pel denominador de la funció de transferència $G(z)$.
- c) Aplicar la *transformada inversa de Z* i el *teorema de desplaçament en el temps*⁴.
- d) Expressar la funció resultant en funció de $y(k)$.

És de gran importància utilitzar un nombre elevat de decimals en els coeficients de les equacions en diferències, almenys uns sis, per minimitzar la pèrdua d'informació.

⁴ Teorema de desplaçament en el temps

$$Z[f(t - nT)] = z^{-n}F(z)$$

7.3.2. Diagrames de blocs en Z

Els sistemes de control, en la major part dels casos, tenen parts contínues, domini de *Laplace*, i parts discretes, domini de les *Z*. Per tant, haurèm de fer ús de blocs electrònics per passar del domini continu al discret, i a la inversa. Aquests blocs són:

- **ADC (Analog-to-Digital Converter).** Element mostrejador que permet passar del domini continu al discret.
- **DAC (Digital-to-Analog Converter).** Element retenidor que permet passar del domini discret al continu. Com s'ha esmentat en apartats anteriors, s'utilitzarà el *ZOH* com a retenidor.

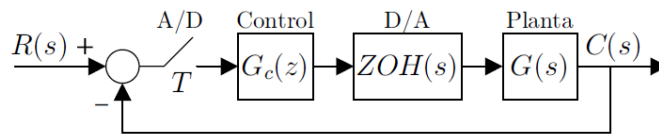


Fig. 133. Sistema de control amb blocs continus i discrets

Una característica important del *ZOH* és que no modifica el *tipus* de la planta. La *transformada Z* del *ZOH* amb la planta és:

$$Z[ZOH(s)G(s)] = Z\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}G(s)\right] = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

La funció de transferència del llaç tancat del sistema genèric de la Fig. 132 s'expressa com:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)Z[ZOH(s)G(s)]}{1 + G_c(z)Z[ZOH(s)G(s)]}$$

7.3.3. Correspondència entre el pla S i el pla Z

La condició mínima d'estabilitat en els sistemes discrets, és que tots els pols de la funció de transferència discreta es trobin en l'interior del cercle unitari.

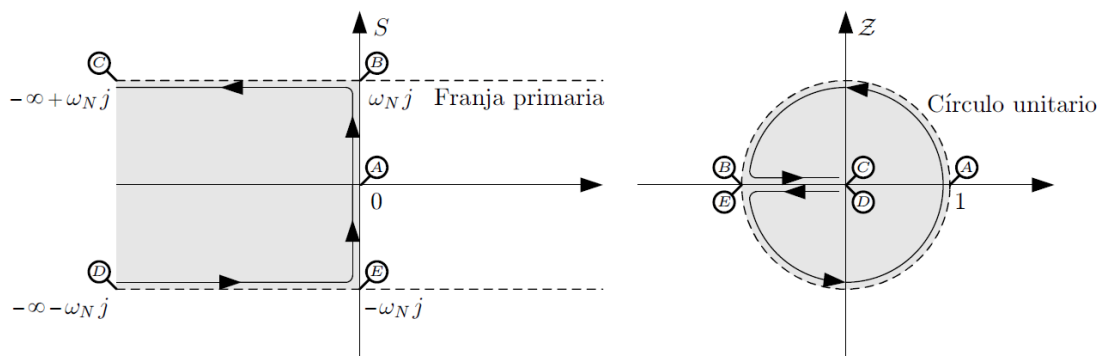


Fig. 134. Franja primària (pla S) i cercle unitari (pla Z)

Quan s'utilitzin períodes de mostreig molt petits, com en aquest projecte, els pols es trobaran molt pròxims de la unitat. Per aquest motiu és molt important utilitzar diversos decimals, del contrari es perd molta informació; vora uns sis decimals, com s'ha indicat en l'apartat 8.3.1.

Al variar el període de mostreig, automàticament canvia l'amplitud de la franja primària i la posició dels pols (en el pla S) en aquesta franja. És per aquest motiu que canvia la posició dels pols en el pla complex Z .

Per al mapeig entre S i Z es poden utilitzar les següents relacions:

$$s = -\sigma \pm j\omega_d$$

On $\sigma = \xi\omega_n$ i $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$. Per tant, realitzant el canvi de variable $z = e^{sT}$, s'obté:

$$z = e^{(-\sigma \pm j\omega_d)T} = e^{-\sigma T} e^{\pm j\omega_d T}$$

Es pot expressar en termes del mòdul i de fase com:

$$|z| = e^{-T\xi\omega_n} \text{ i } \angle z = \pm T\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \text{ rad}$$

En aquest projecte s'ha optat per utilitzar els següents mètodes de digitalització:

- **Backward Euler.** S'utilitzarà per digitalitzar l'acció derivativa. S'expressa com:

$$s = \frac{z-1}{z \cdot T_s}$$

- **Trapezoidal (o Tustin o Bilinear).** S'utilitzarà per digitalitzar l'acció integral. S'expressa com:

$$s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

Per tant, digitalitzant els controladors implementats en aquest projecte, es construeix la Taula 43 de transformacions de continu a discret.

Continu	Discret
$P(s) = K_p$	$P(z) = K_p$
$I(s) = \frac{K_i}{s}$	$I(z) = a \frac{z+1}{z-1}$ $a = \frac{2K_i}{T_s}$
$PD(s) = K_p + K_d s$ $PD(s) = K_p (1 + T_d s)$	$PD(z) = \frac{az+b}{z}$ $a = K_p + \frac{K_d}{T_s}$ $b = -\frac{K_d}{T_s}$
$PI(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$ $PI(s) = K_p (1 + \frac{1}{T_i s})$	$PI(z) = \frac{az+b}{z-1}$ $a = K_p + \frac{K_i T_s}{2}$ $b = \frac{K_i T_s}{2} - K_p$
$PID(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$ $PID(s) = K_p (1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s)$	$PID(z) = \frac{az^2 + bz + c}{z(z-1)}$ $a = K_p + \frac{K_i T_s}{2} + \frac{K_d}{T_s}$ $b = \frac{K_i T_s}{2} - K_p - \frac{2K_d}{T_s}$ $c = \frac{K_d}{T_s}$

Taula 43. Transformacions de règim continu a discret dels controladors

Recuperant el contingut de l'apartat 8.3.1, amb l'objectiu de programar un controlador discret, la funció de transferència d'aquest s'haurà de transformar en una equació en diferències.

Seguin el procediment explicat en aquest apartat, es construeix la següent taula, que recull les equacions en diferències de tots els controladors descrits en la Taula 43.

Controlador	Equació en diferències ⁵
$G_c^P(z)$	$u_o(k) = K_p \cdot e(k)$
$G_c^I(z)$	$u_o(k) = a \cdot e(k) + a \cdot e(k-1) + u_o(k-1)$
$G_c^{PD}(z)$	$u_o(k) = a \cdot e(k) + b \cdot e(k-1)$
$G_c^{PI}(z)$	$u_o(k) = a \cdot e(k) + b \cdot e(k-1) + u_o(k-1)$
$G_c^{PID}(z)$	$u_o(k) = a \cdot e(k) + b \cdot e(k-1) + c \cdot e(k-2) + u_o(k-1)$

Taula 44. Controladors en equacions de diferències

On $u_o(k)$ són les mostres de la senyal de control i $e(k)$ les del senyal d'error. Els termes $(k - n)$ indiquen mostres anteriors a l'actual.

7.4. Discretització dels blocs de control

En aquest apartat, es ficarà en pràctica els coneixements i mètodes esmentats anteriorment per digitalitzar els controladors i les plantes dissenyats en la primera i segona fase del projecte.

Com s'ha esmentat anteriorment, és molt important triar un període de mostreig que asseguri l'estabilitat del sistema i un mostreig acurat. Per aquest motiu, s'utilitzaran les tècniques de càlcul del temps de mostreig T_s de l'apartat 8.1. S'ha de tenir en compte que el temps de mostreig T_s mínim que podem utilitzar serà d' 1 μs , determinat pel microcontrolador emprat, *Arduino Due*.

Per agilitzar aquests càlculs, s'han construït uns arxius *Simulink*, en els quals s'ha simulat l'esquema electrònic dels blocs de control i de les plantes, amb l'ajuda de la *Simscape Electrical Toolbox* facilitada per *Matlab*.

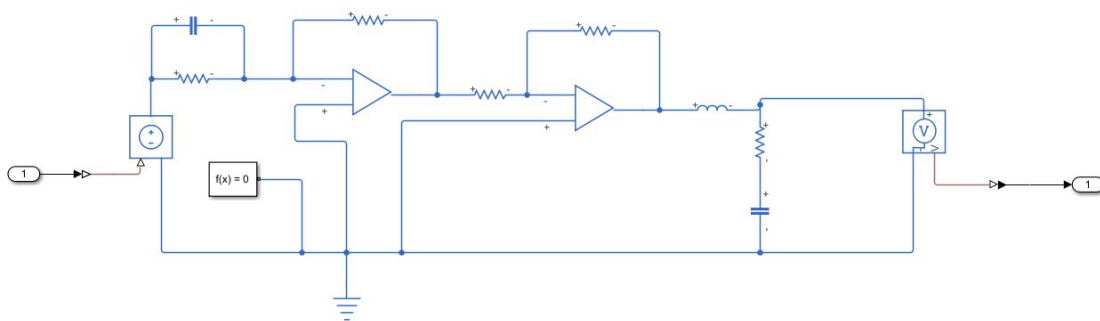


Fig. 135. Exemple esquemàtic implementat en Simulink

Un cop construït l'esquemàtic, amb l'aplicació *Frequency Response* de la *Control System Toolbox*; s'ha realitzat la simulació de la resposta en freqüència dels sistemes de control. Aquesta aplicació et permet crear un senyal d'entrada sinusoidal tot indicant el rang de freqüències i l'espai entre freqüències.

⁵ Observar Taula 43 per estimar les variables a , b i c .

Un cop realitzada la simulació, és pot escollir l'opció de visualitzar la resposta en freqüència mitjançant el *diagrama de Bode*. D'aquesta manera podrem calcular ràpidament l'amplada de banda.

Per tant, realitzant aquests càlculs, s'obté la *Taula 45* en la que es s'observa el valor de l'amplada de banda ω_m segons el bloc de control aplicat i la planta a controlar.

Planta	Sense controlador	<i>P</i>	<i>PD</i>	<i>I</i>	<i>PI</i>	<i>PID</i>
1	2830 rad/s	12807 rad/s	39891 rad/s	2005 rad/s	14000 rad/s	8291 rad/s
2	2000 rad/s	9056 rad/s	10765 rad/s	1412 rad/s	8247 rad/s	6332 rad/s
3	998 rad/s	998 rad/s	—	4000 rad/s	587000 rad/s	133000 rad/s
4	1240 rad/s	1240 rad/s	—	11159 rad/s	244000 rad/s	242000 rad/s
5	310 rad/s	310 rad/s	—	8320 rad/s	9150 rad/s	—

Taula 45. Ample de banda ω_m dels sistemes de control

Segons el teorema de *Shannon-Nyquist*, per obtenir el període de mostreig, s'aplica:

$$T_s < \frac{\pi}{\omega_m}$$

D'aquesta manera, a partir de la *Taula 45* s'obté la taula dels períodes de mostreig.

Planta	Sense controlador	<i>P</i>	<i>PD</i>	<i>I</i>	<i>PI</i>	<i>PID</i>
1	1.11 ms	245.32 μ s	78.755 μ s	1.5675 ms	224 μ s	378.96 μ s
2	1.57 ms	346.93 μ s	291.85 μ s	2.2263 ms	380.977 μ s	496.145 μ s
3	3.15 ms	3.15 ms	—	785.4 μ s	5.35 μ s	23.6 μ s
4	2.53 ms	2.53 ms	—	314.16 μ s	12.9 μ s	13 μ s
5	10.1 ms	10.1 ms	—	378 μ s	343 μ s	—

Taula 46. Període de mostreig teorema de Shannon-Nyquist dels sistemes de control

Com es pot observar, cap dels T_s es troba per sota d'1 μ s.

Per tant, segons el teorema de *Shannon-Nyquist*, el T_s escollit per realitzar la digitalització haurà de ser menor al valor corresponent de la *Taula 46* i major que 1 μ s.

Un cop determinats els T_s dels sistemes de control, amb l'ajuda de la comanda **c2d()**, de la que s'ha parlat en l'*apartat 8.3*, es digitalitzaran els blocs de control i les plantes. Un cop digitalitzats, es realitzaran les simulacions per observar les diferències envers el règim continu, funció de transferència expressada en el domini de *Laplace*, i el règim discret, funció de transferència expressada en el domini de les *Z*.

Les gràfiques presentaran la següent informació:

- Lloc geomètric de les arrels en el pla Z.** A mesura que el valor de T_s vagi disminuint. Els pols s'aproximaran més al punt $z = 1$, que correspon a l'origen de coordenades del pla *S*.
- Senyal de sortida (V_{out}) per una entrada esglaó de 0.35V d'amplitud.** Ens servirà de referència per observar les diferències envers el règim continu i el discret.

A continuació, s'introdueix la taula de les transformades *Z* del llaç obert dels sistemes de control, realitzades amb la funció de *Matlab c2d()* amb l'opció *ZOH*. El temps de mostreig escollits han estat determinats en funció de les restriccions presentades pel microprocessador escollit i la *Taula 46*.

Les expressions de la digitalització dels controladors ja han estat determinades en la *Taula 43*; per tant, en la *Taula 47* és referirà a aquests com $G_c(s)$ o $G_z(z)$, depenent del domini.

Planta	$G_{ol}(s)$	Controlador	$T_s [\mu s]$	$G_{ol}(z)$
1	$G_c(s) \frac{500(s+2000)}{s^2+500s+1000000}$	—	277.6802	$G_c(z) \frac{0.1646(z-0.56525)}{z^2-1.799z+0.8704}$
		P	12.266	$G_c(z) \frac{0.006189(z-0.975763)}{z^2-1.994z+0.9939}$
		PD	1.9689	$G_c(z) \frac{0.0009859(z-0.996)}{z^2-1.999z+0.999}$
		I	1567.5	$G_c(z) \frac{1.138(z+0.2167)}{z^2-0.0717z+0.4567}$
		PI	56.1	$G_c(z) \frac{0.0292(z-0.8938)}{z^2-1.969z+0.9723}$
		PID	54.137	$G_c(z) \frac{0.02814(z-0.8973)}{z^2-1.97z+0.9733}$
2	$G_c(s) \frac{100(s+5000)}{s^2+200s+500000}$	—	157.08	$G_c(z) \frac{0.02153(z-0.043646)}{z^2-1.957z+0.9691}$
		P	34.6931	$G_c(z) \frac{0.003757(z-0.8403)}{z^2-1.992z+0.9931}$
		PD	29.185	$G_c(z) \frac{0.003122(z-0.86419)}{z^2-1.994z+0.9942}$
		I	556.59	$G_c(z) \frac{0.125(z+0.15744)}{z^2-1.75z+0.8947}$
		PI	38.098	$G_c(z) \frac{0.004157(z-0.82607)}{z^2-1.992z+0.9924}$
		PID	16.538	$G_c(z) \frac{0.001719(z-0.9209)}{z^2-1.997z+0.9967}$
3	$G_c(s) \frac{1000}{s+1000}$	—	393.49	$G_c(z) \frac{0.3253}{z-0.6747}$
		P	5.2465	$G_c(z) \frac{0.005233}{z-0.9948}$
		I	98.175	$G_c(z) \frac{0.09351}{z-0.9065}$
		PI	2.676	$G_c(z) \frac{0.002672}{z-0.9973}$
		PID	11.81	$G_c(z) \frac{0.01174}{z-0.9883}$
				$G_c(z) \frac{0.1119}{z-0.7762}$
4	$G_c(s) \frac{500}{s+1000}$	P	12.668	$G_c(z) \frac{0.006294}{z-0.9874}$
		I	187.21	$G_c(z) \frac{0.08537}{z-0.8293}$
		PI	6.4377	$G_c(z) \frac{0.003209}{z-0.9936}$
		PID	6.4909	$G_c(z) \frac{0.003235}{z-0.9935}$
				$G_c(z) 0.5 \frac{(z+0.62224)(z+0.40756)}{(z+0.776197)(z+3.15126 \cdot 10^{-6})}$
				$G_c(z) 0.5 \frac{(z+1)(z+0.9824)}{z^2-1.974z+0.9745}$
5	$G_c(s) 0.5 \frac{(s+149.25373)(s+3350)}{(s+100)(s+5000)}$	I	188.8	$G_c(z) 0.5 \frac{(z+0.972)(z+0.591722)}{(z+0.980677)(z+0.389323)}$
		PI	17.167	$G_c(z) 0.5 \frac{(z+1)(z+0.9424)}{(z+0.997547)(z+0.91845)}$

Taula 47. Transformacions de continu a discret dels sistemes de control

A continuació, es mostraran les gràfiques dels sistemes de control digitalitzats:

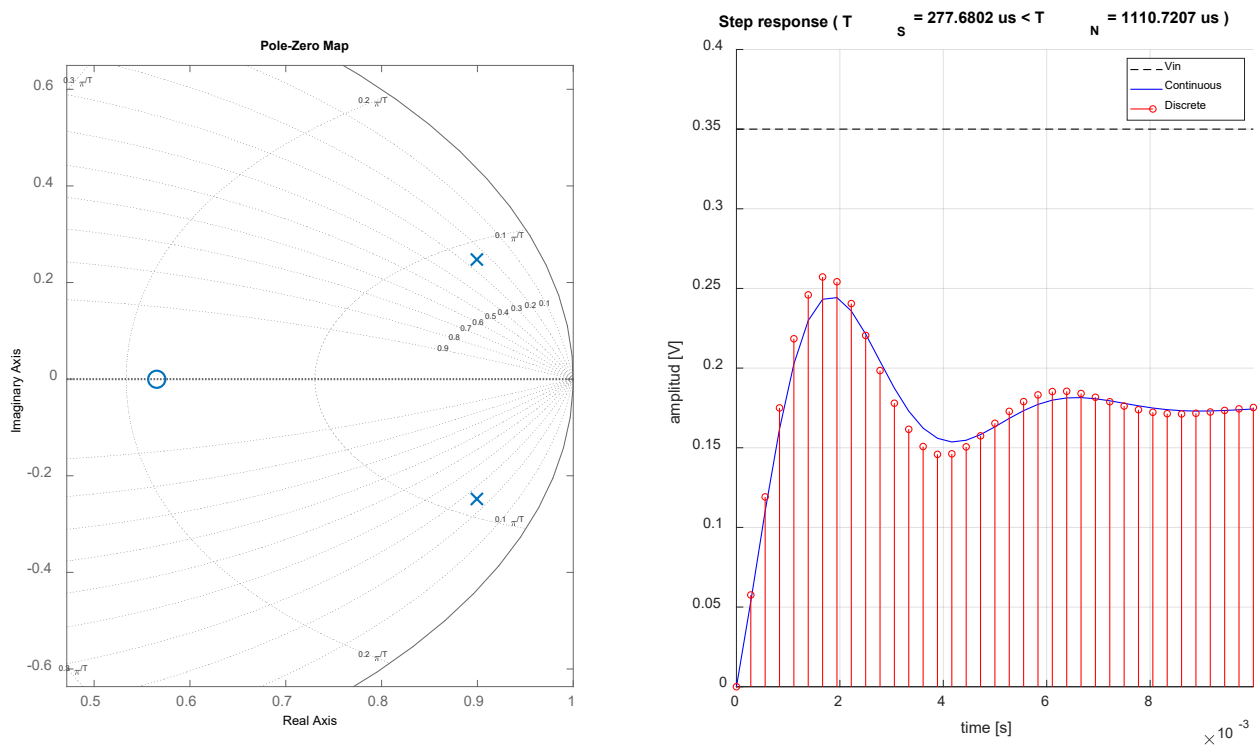


Fig. 136. Digitalització Planta 1

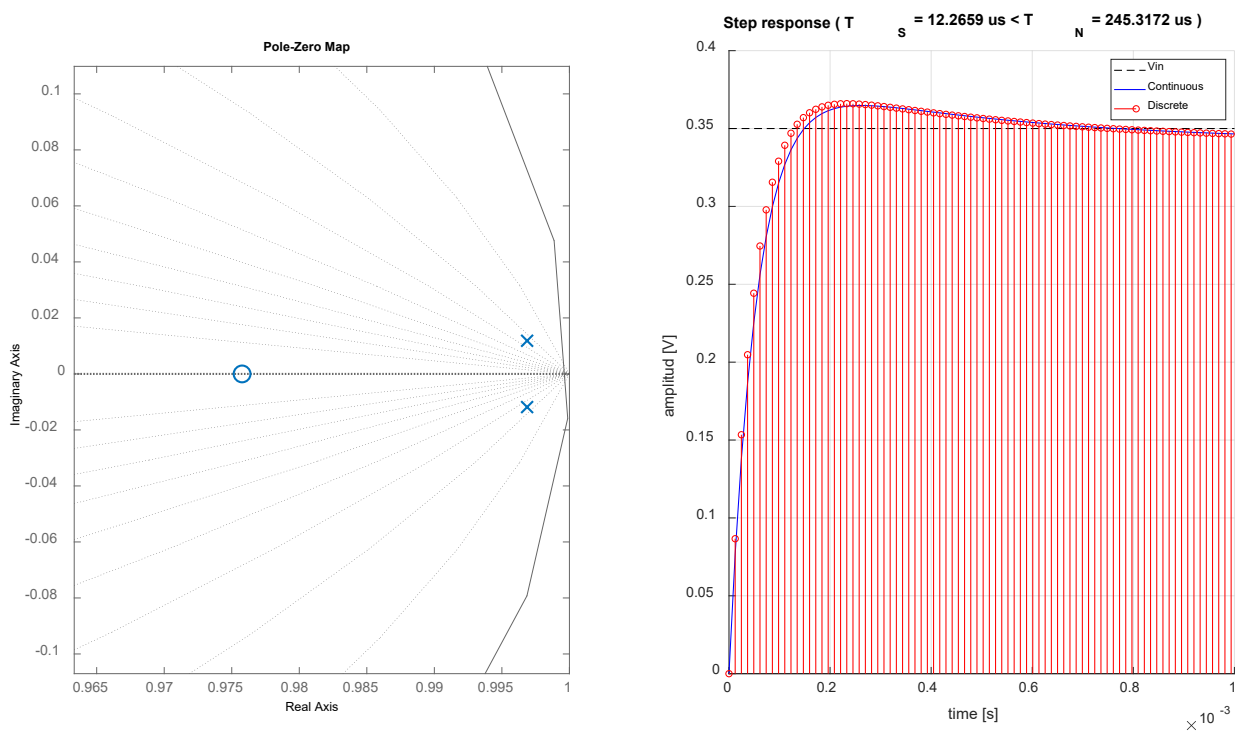


Fig. 137. Digitalització Controlador P + Planta 1

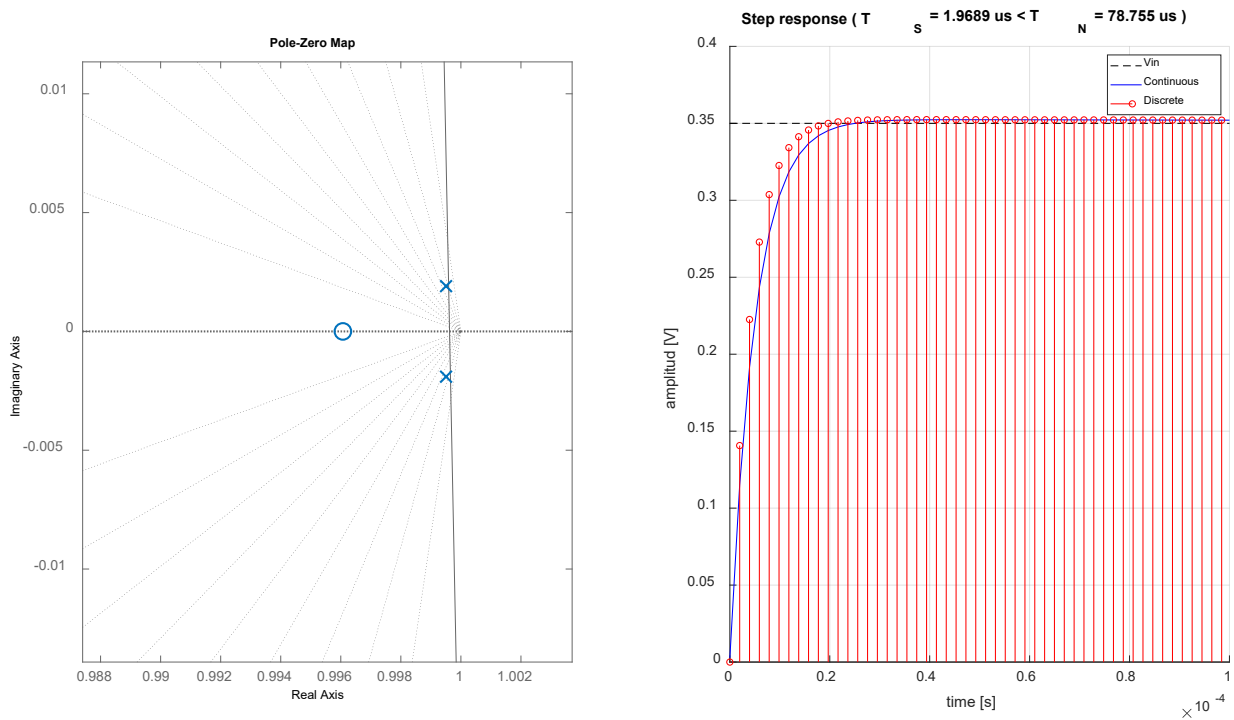


Fig. 138. Digitalització Controlador PD + Planta 1

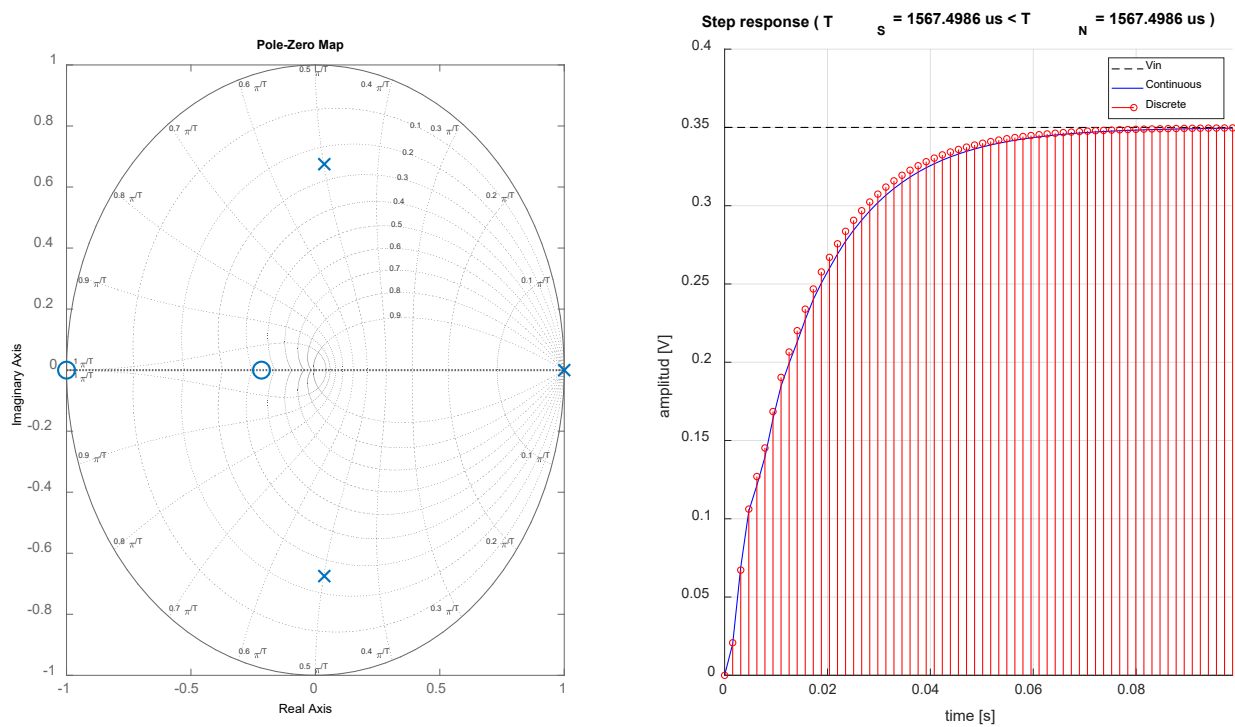


Fig. 139. Digitalització Controlador I + Planta 1

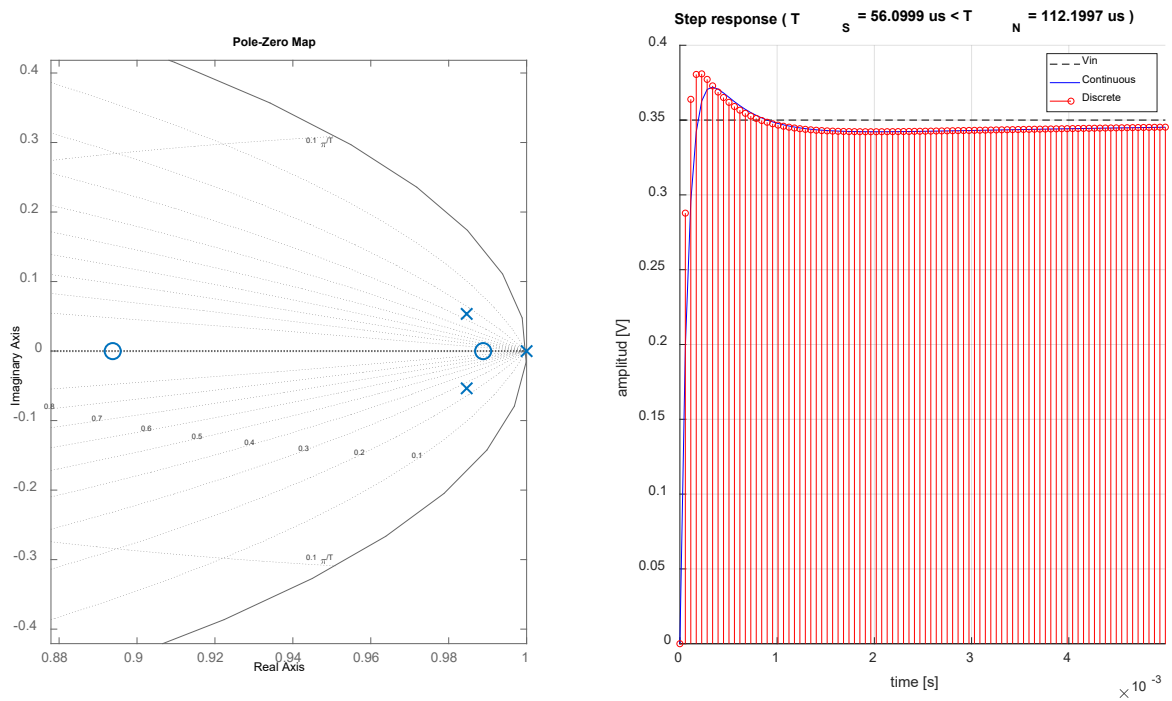


Fig. 140. Digitalització Controlador PI + Planta 1

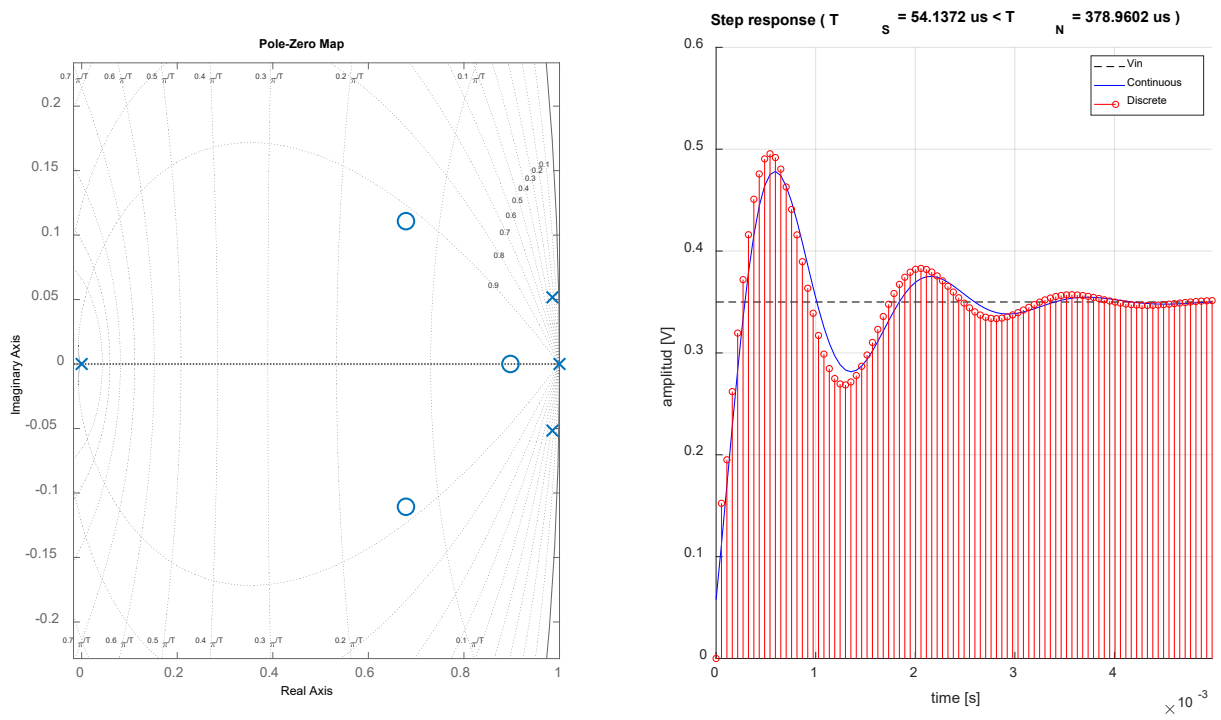


Fig. 141. Digitalització Controlador PID + Planta 1

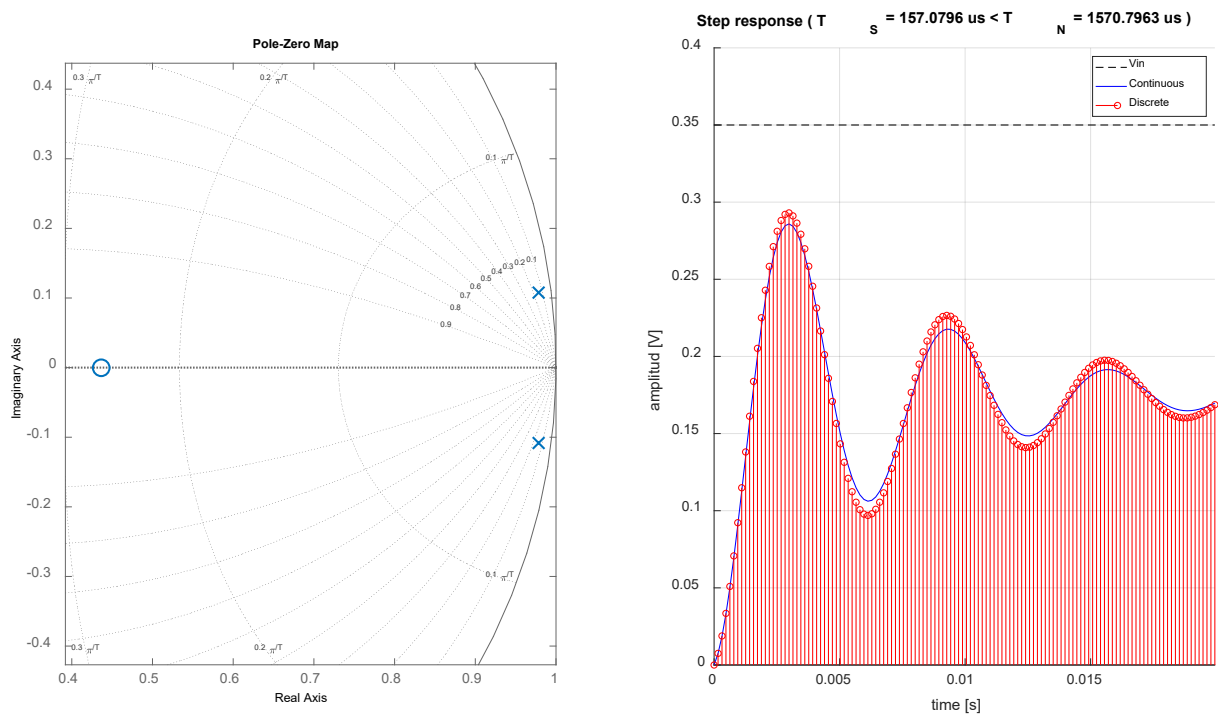


Fig. 142. Digitalització Planta 2

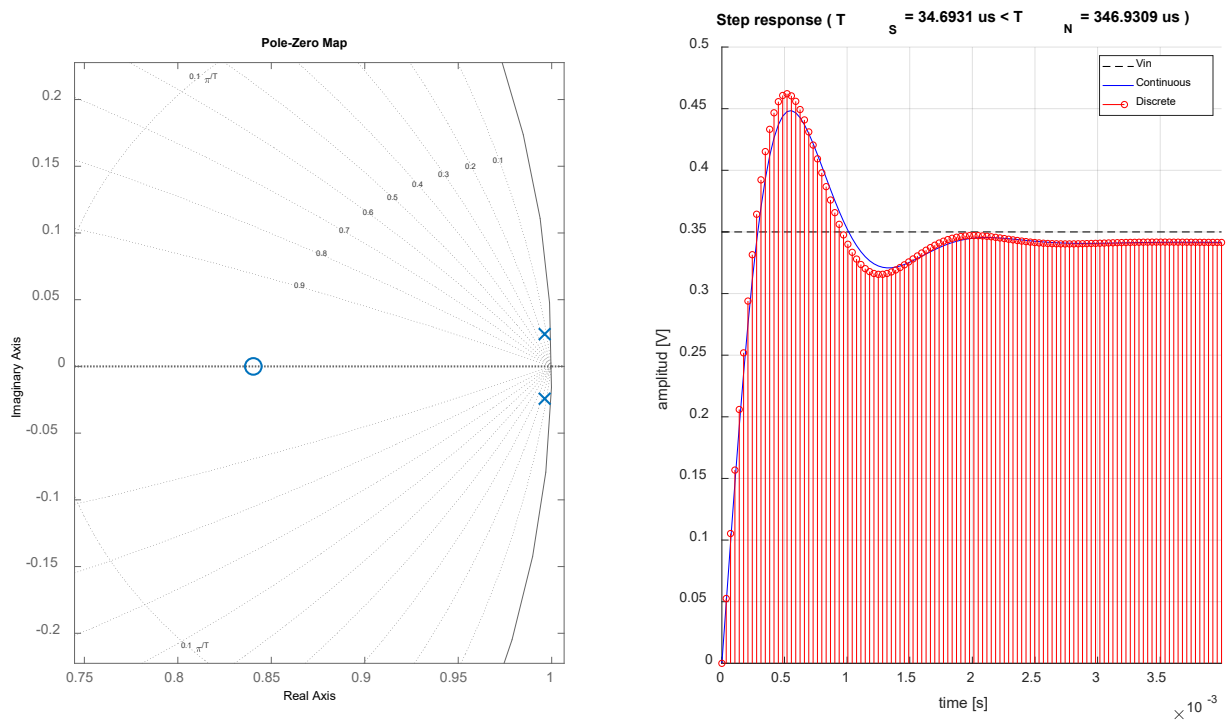


Fig. 143. Digitalització Controlador P + Planta 2

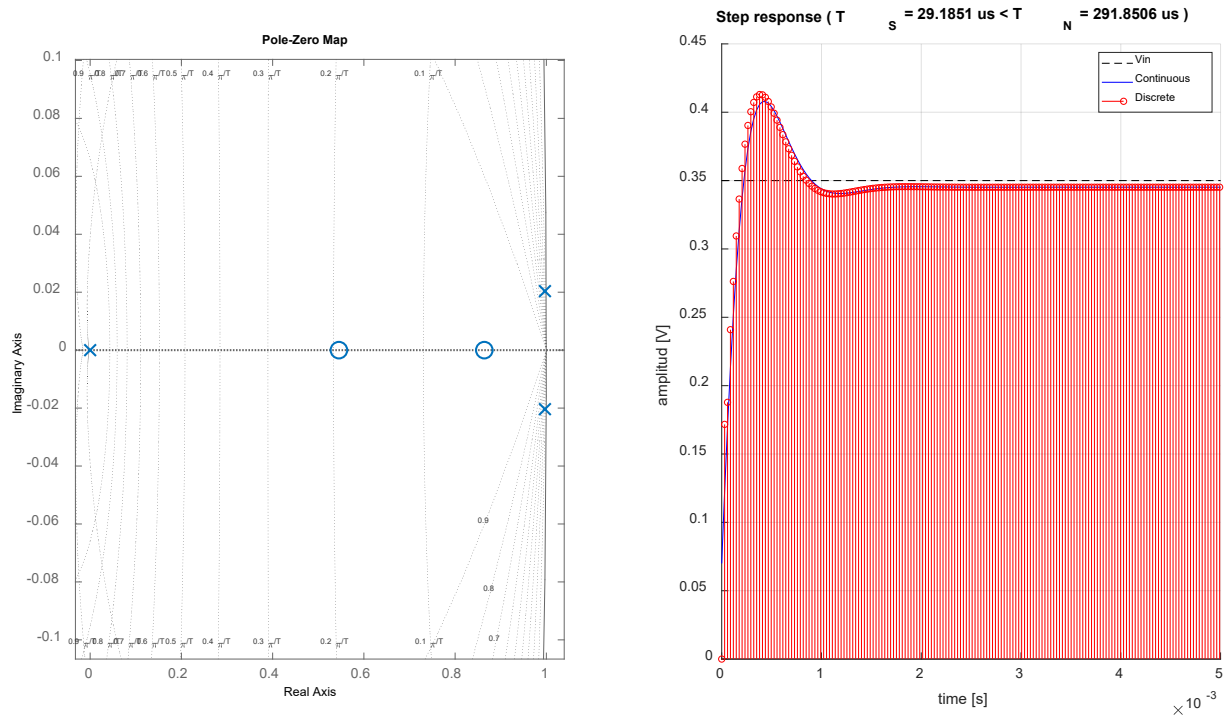


Fig. 144. Digitalització Controlador PD + Planta 2

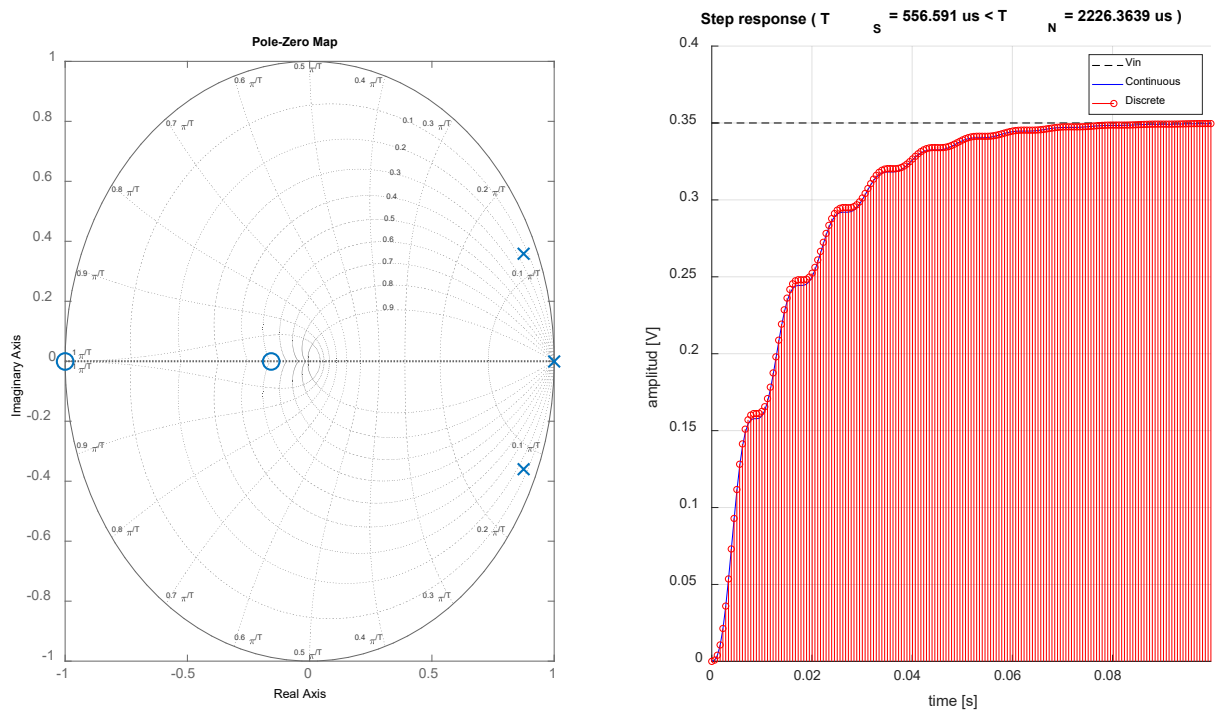


Fig. 145. Digitalització Controlador I + Planta 2

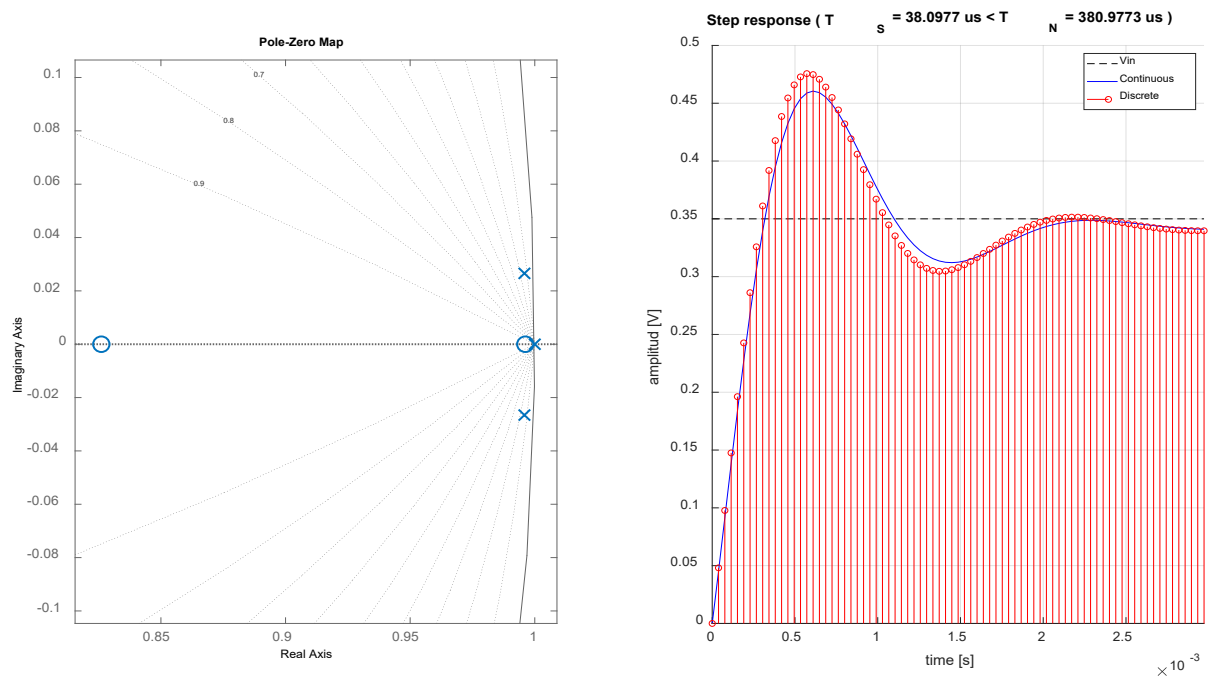


Fig. 146. Digitalització Controlador PI + Planta 2

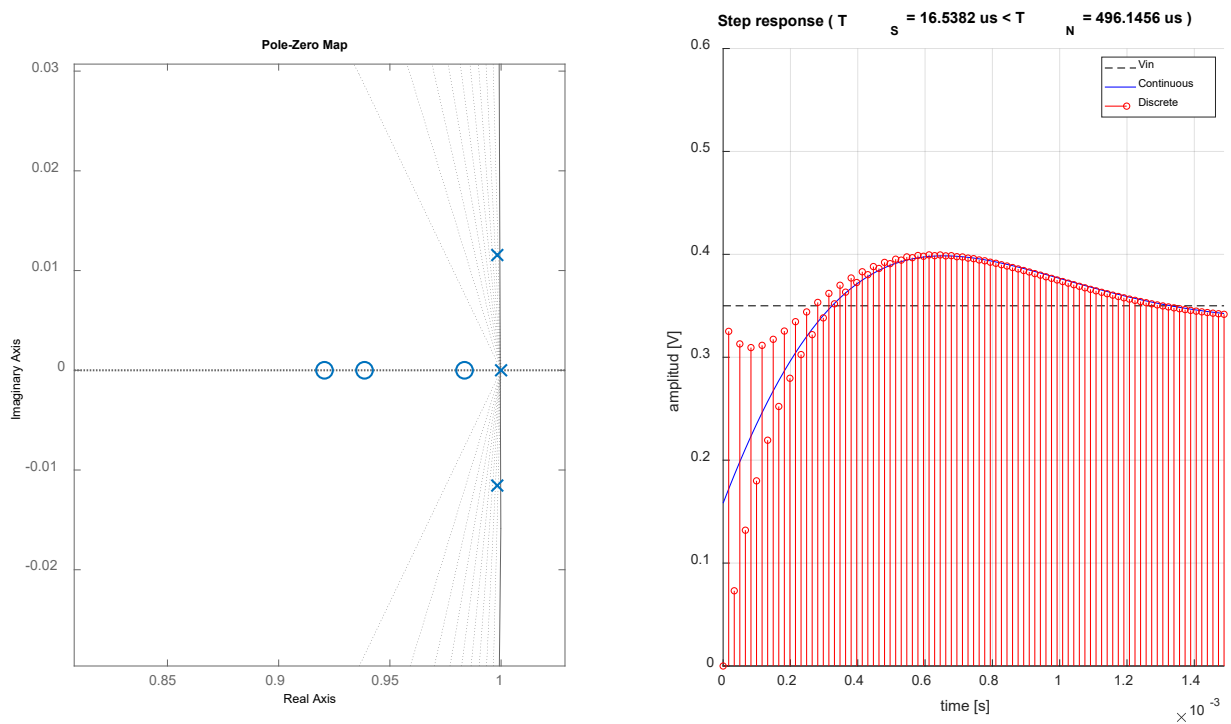


Fig. 147. Digitalització Controlador PID + Planta 2

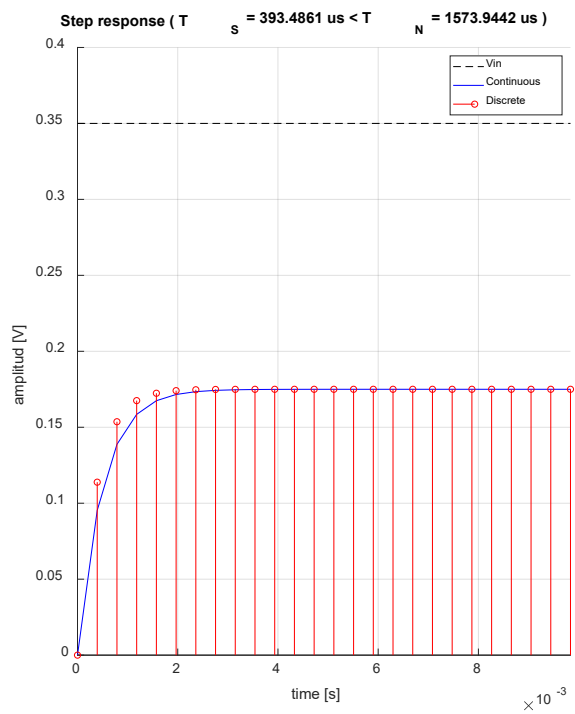
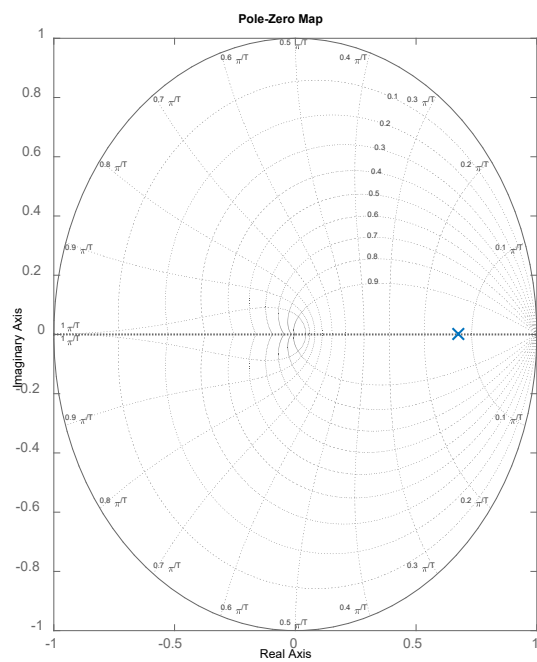


Fig. 148. Digitalització Planta 3

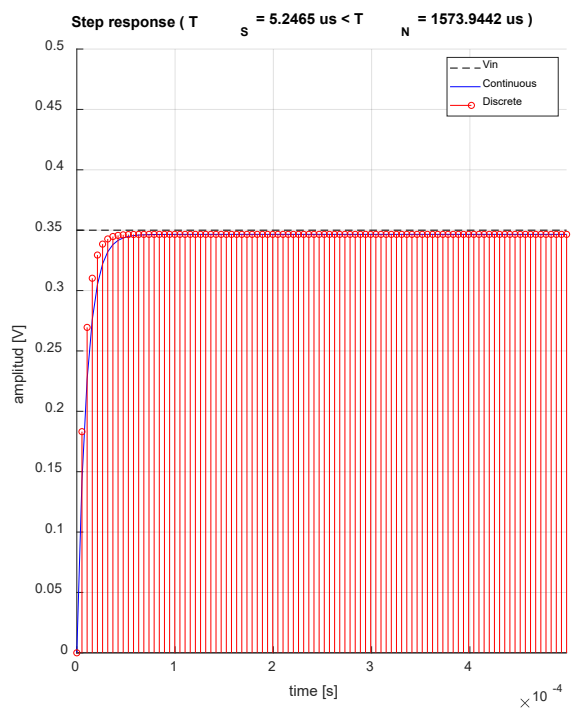
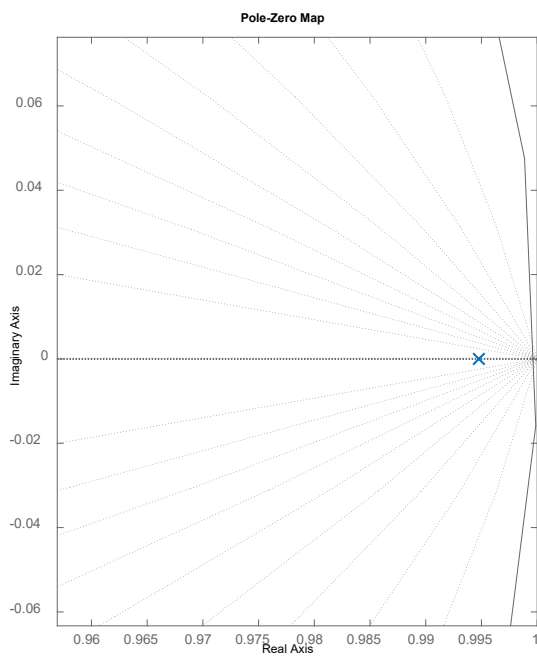


Fig. 149. Digitalització Controlador P + Planta 3

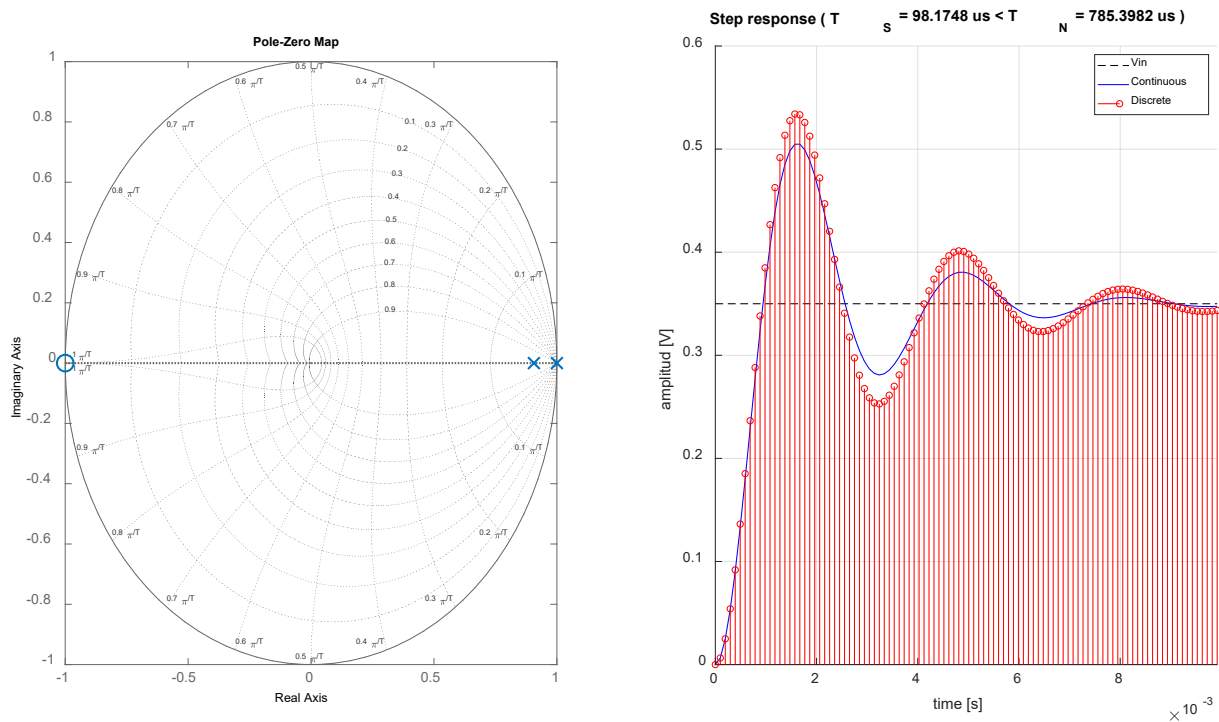


Fig. 150. Digitalització Controlador I + Planta 3

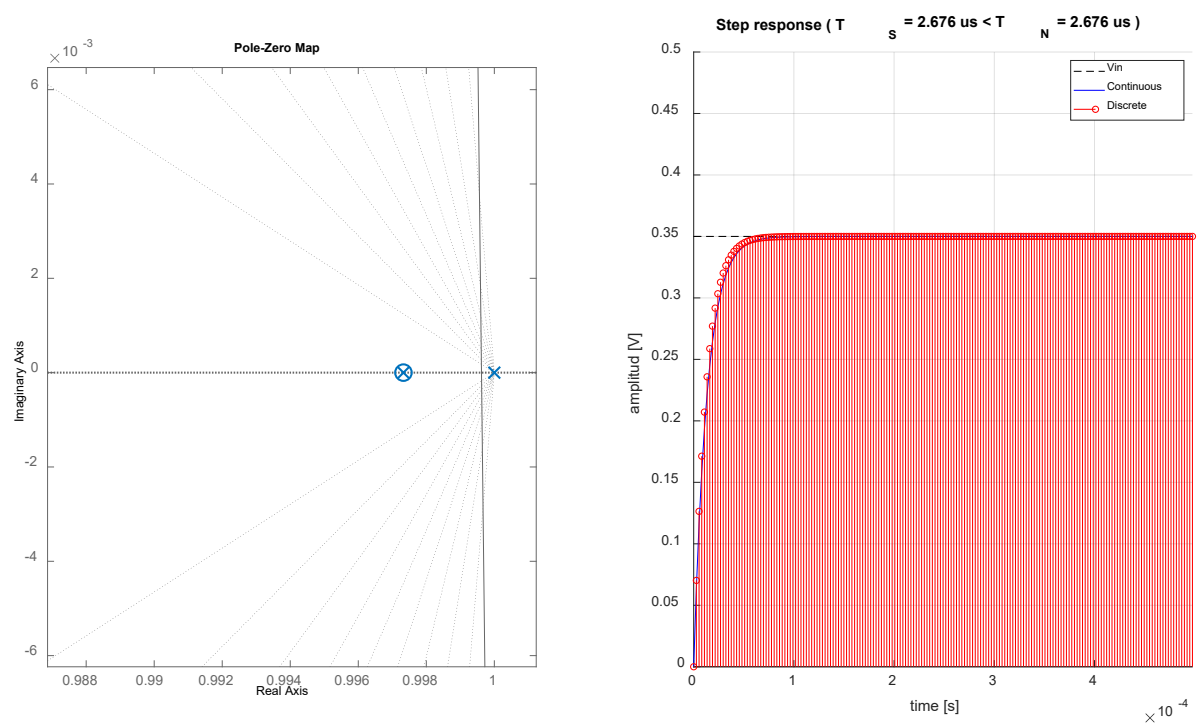


Fig. 151. Digitalització Controlador PI + Planta 3

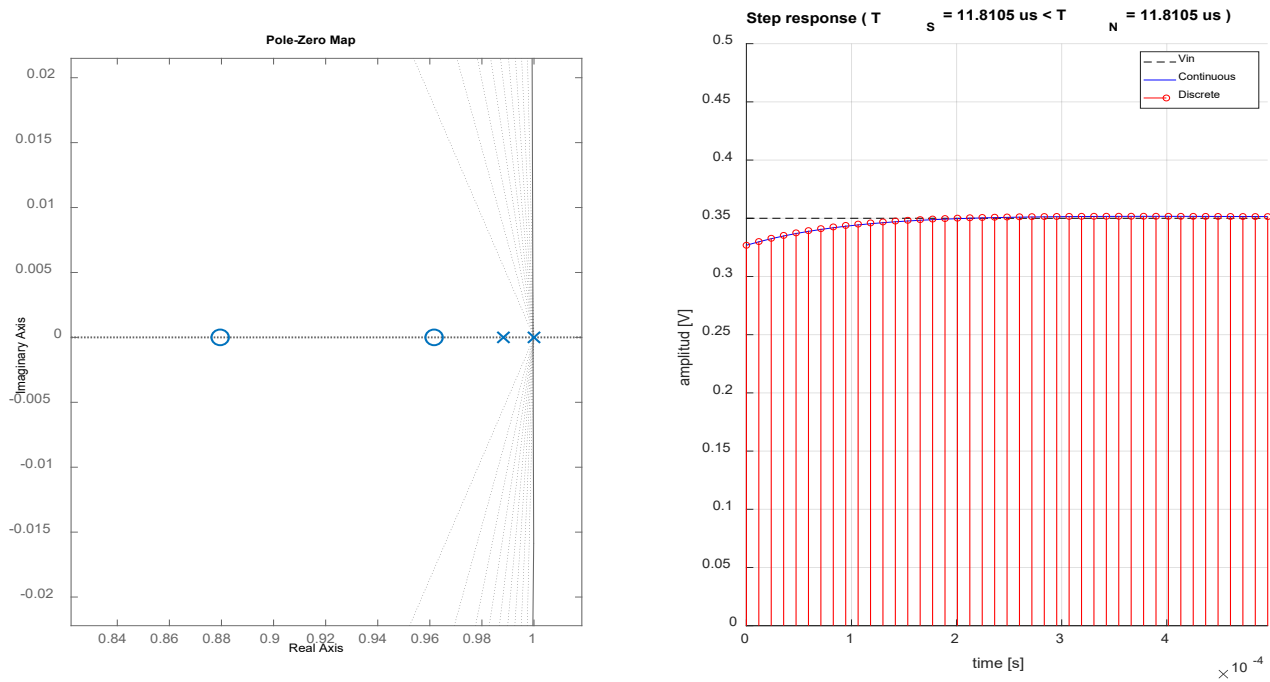


Fig. 152. Digitalització Controlador PID + Planta 3

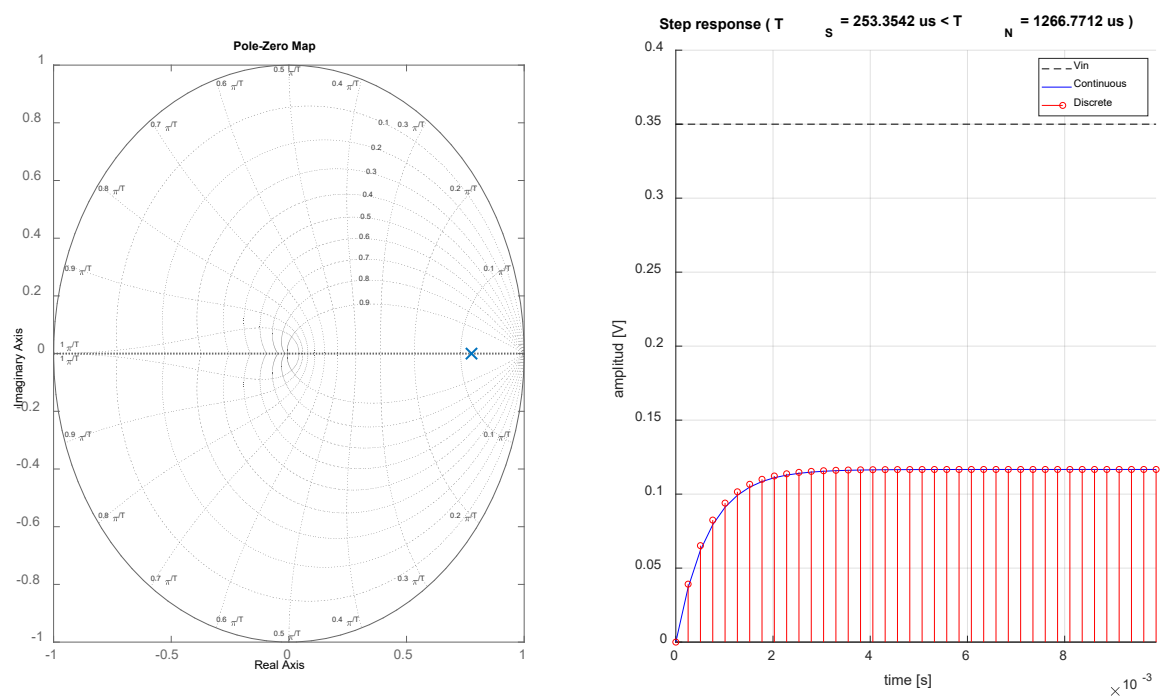


Fig. 153. Digitalització Planta 4

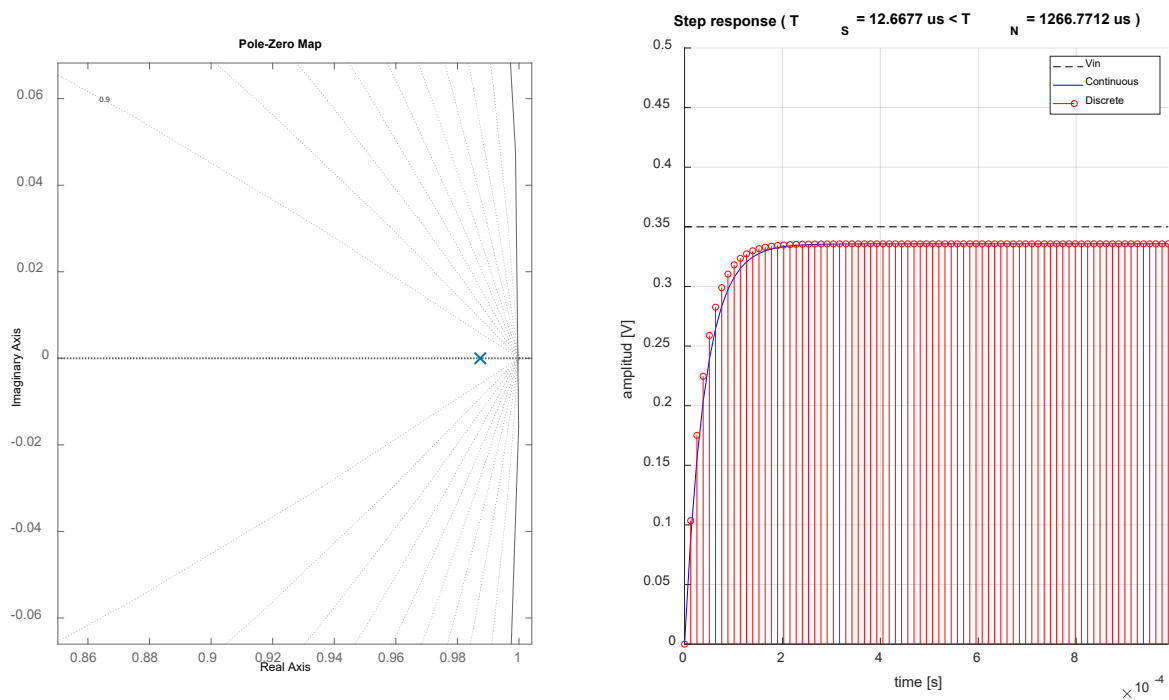


Fig. 154. Digitalització Controlador P + Planta 4

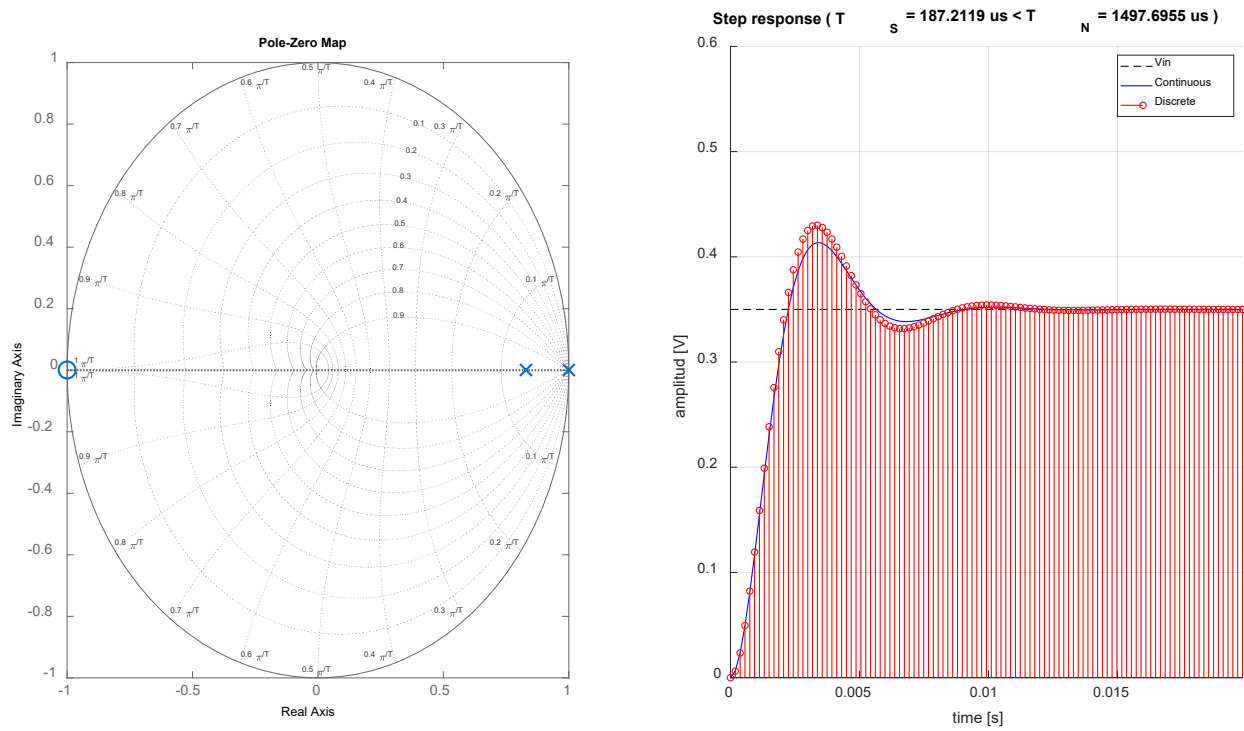


Fig. 155. Digitalització Controlador I + Planta 4

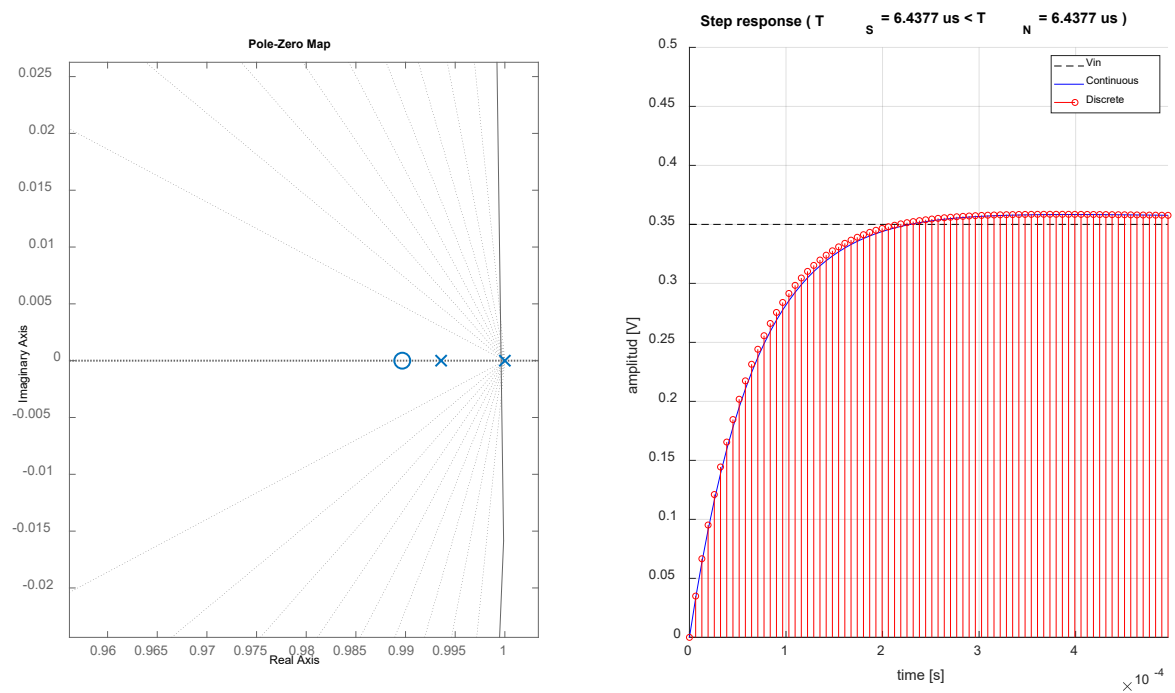


Fig. 156. Digitalització Controlador PI + Planta 4

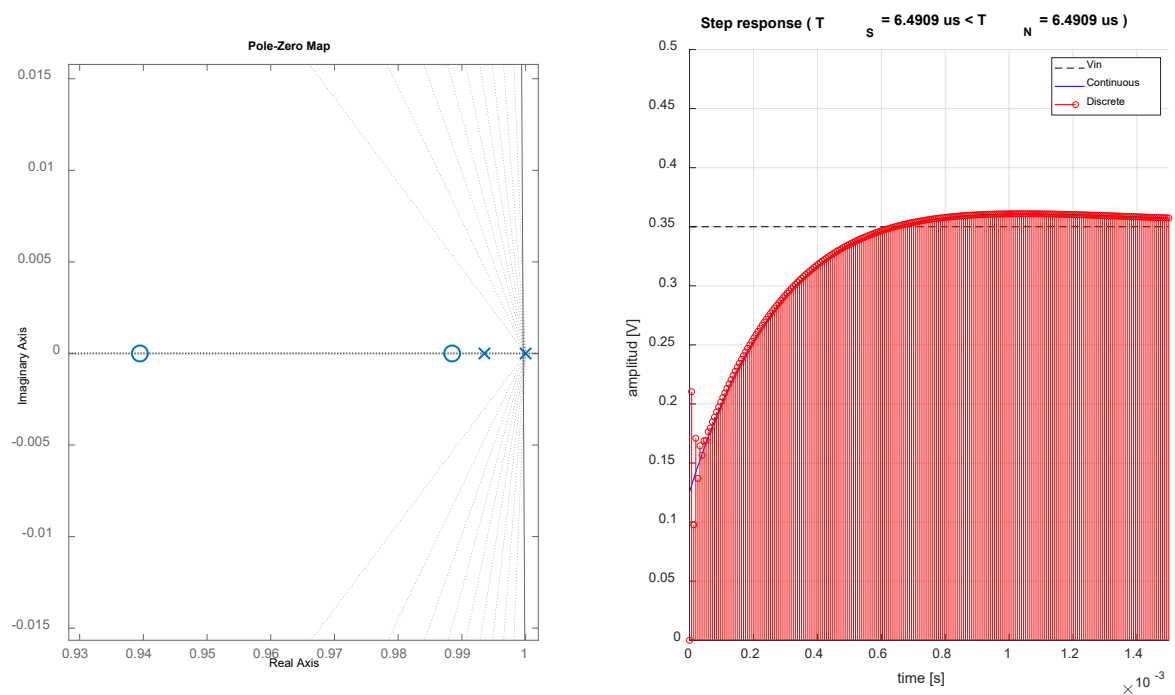


Fig. 157. Digitalització Controlador PID + Planta 4

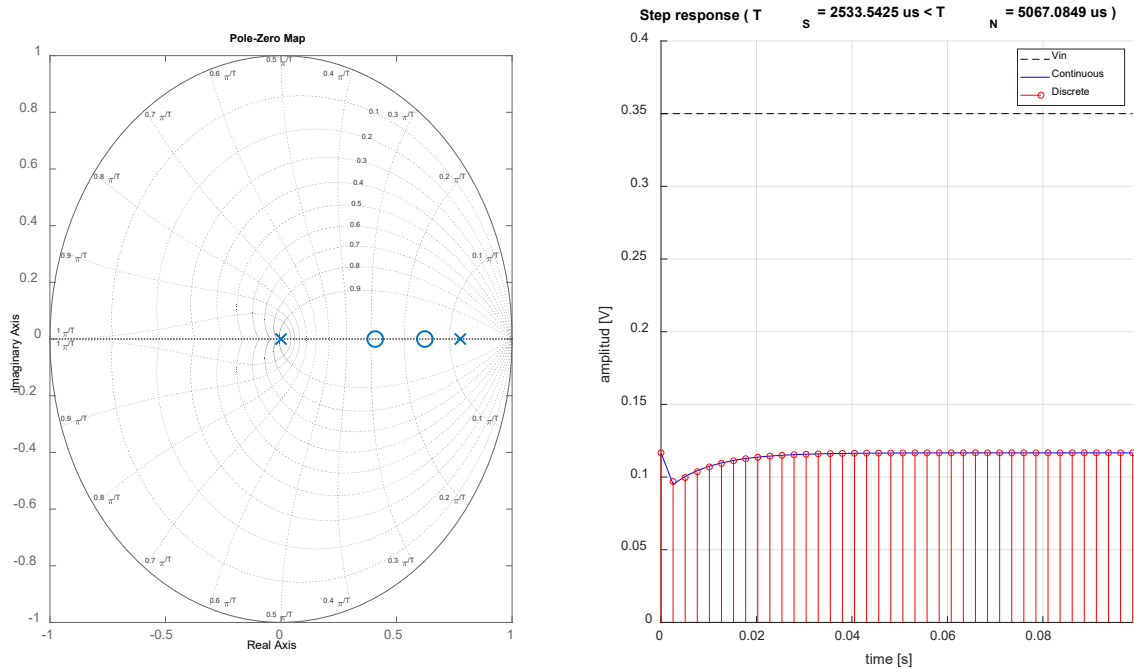


Fig. 158. Digitalització Planta 5

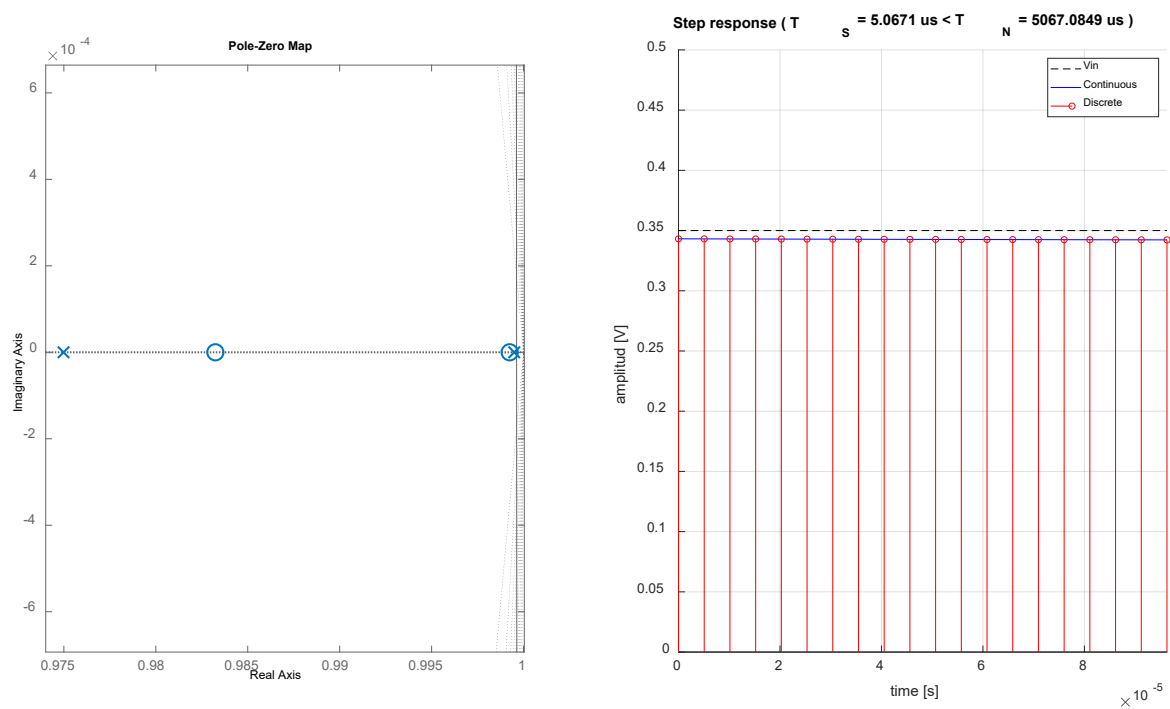


Fig. 159. Digitalització Controlador P + Planta 5

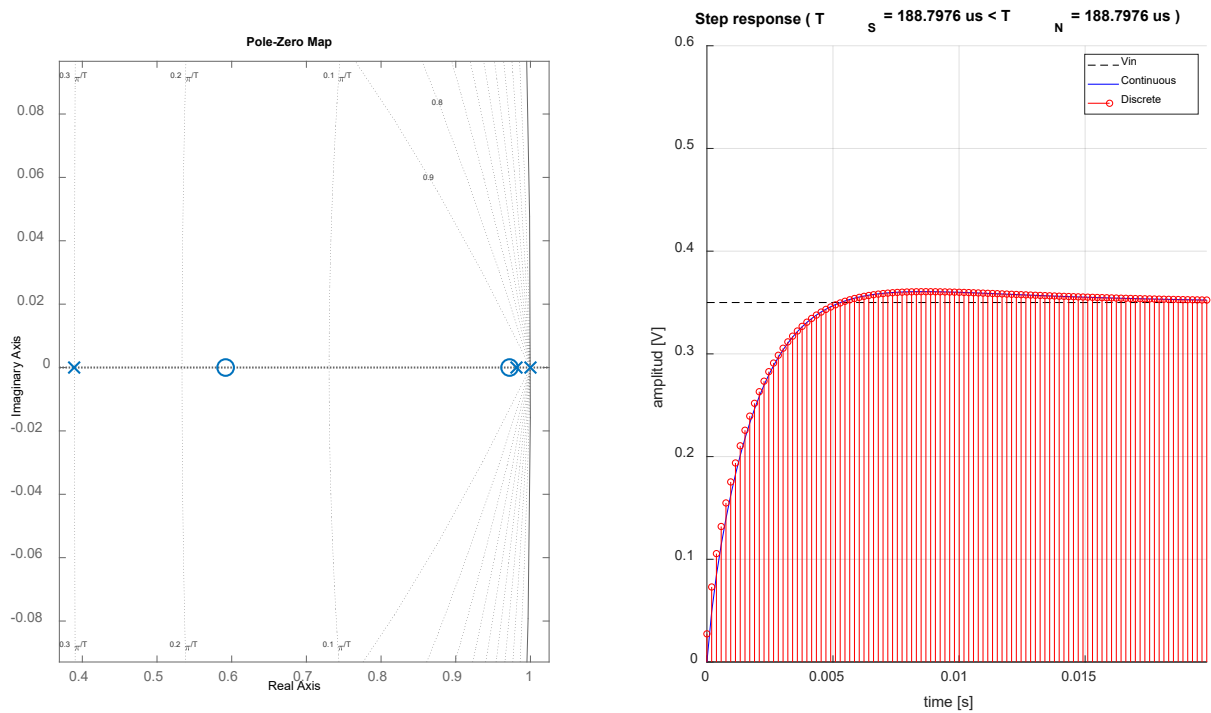


Fig. 160. Digitalització Controlador I + Planta 5

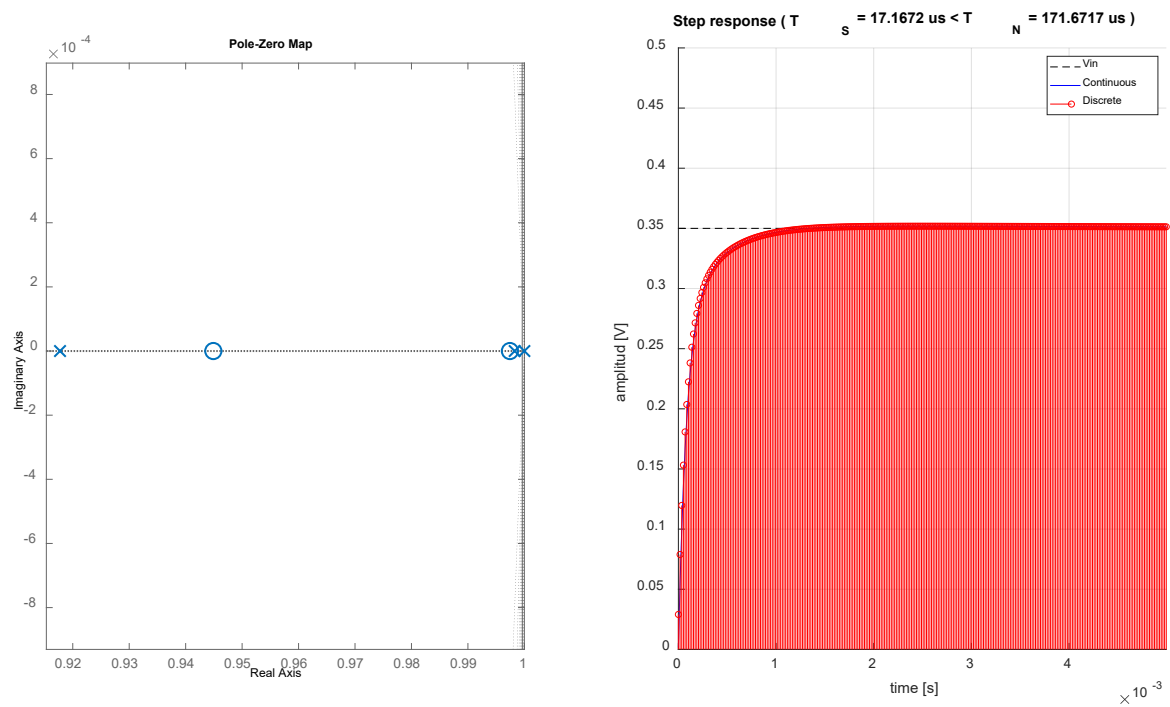


Fig. 161. Digitalització Controlador PI + Planta 5

8. Pràctica associada a la placa per a estudiants del grau d'Enginyeria Electrónica i Automàtica Industrial de la Universitat de Lleida que cursin Teoria Bàsica de Control.

En aquest apartat es detallen les preguntes de la pràctica i la seva solució. La planta escollida ha estat la segona planta del projecte. La resolució pràctica de les activitats es pot realitzar en el simulador online gratuït *Falstad* o qualsevol altre equivalent. També es demanarà que els alumnes realitzin les simulacions en l'entorn *Matlab*.

La pràctica també contindrà breus preguntes teòriques on es determinarà el coneixement de l'alumne de les bases de l'assignatura.

8.1. Pregunta 1

Mitjançant l'espectre de magnitud de la planta (Fig. 162) obtingui la funció de transferència de la planta $G(s)$.

Per resoldre aquesta activitat, s'hauran d'utilitzar les tècniques d'identificació de sistemes basades en freqüència, introduïdes en l'*apartat 6.1.2* del projecte.

Solució

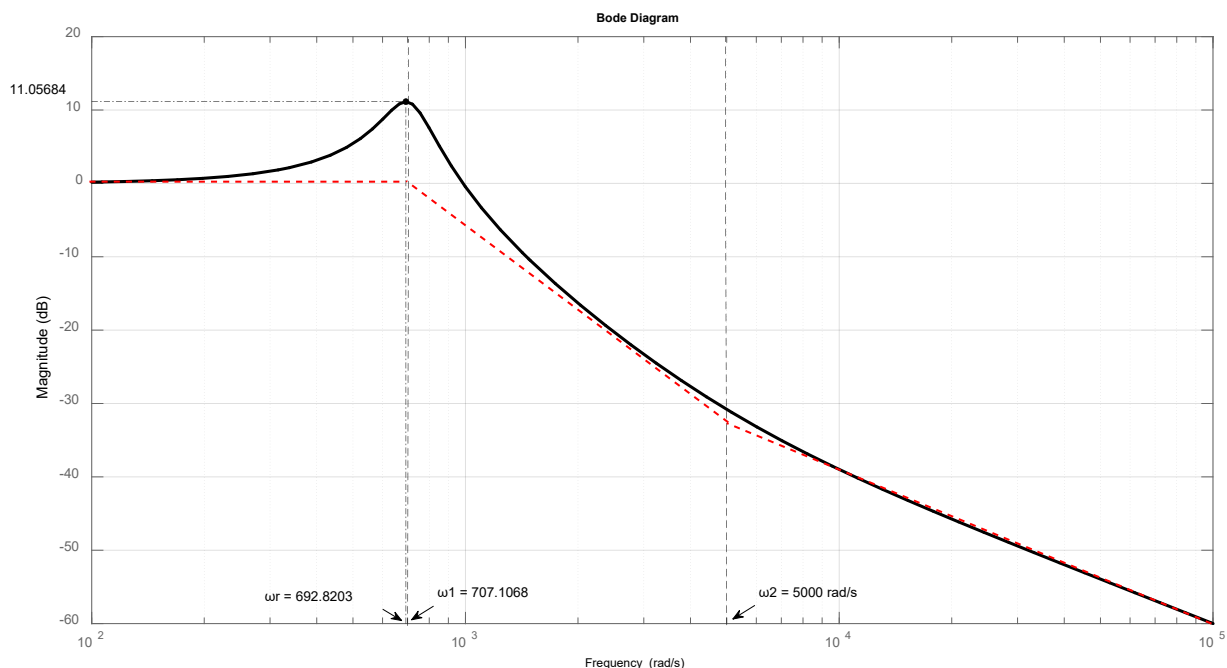


Fig. 162. Espectre de la magnitud de $G(s)$ obtingut amb Matlab. Les asímptotes han estat afegides per assegurar que tots els alumnes escullen la mateixa freqüència de tall

S'observa que per a freqüències baixes l'espectre de magnitud és completament horitzontal a 0 dB, indicant que es tracta d'un sistema tipus 0 amb un guany (K) unitari: $0 = 20 \log(K)$, amb el qual $K = 1$. A part, s'observa un integrador quadràtic i un derivador de primer ordre amb freqüències de tall de $\omega_1 = 707.1068$ rad/s i $\omega_2 = 5000$ rad/s, respectivament.

Per tant, es pot expressar $G(j\omega)$ com:

$$G(j\omega) = K \frac{(1 + j\omega_2 T)}{1 + 2\xi \left(j \frac{\omega_1}{\omega_n}\right) + \left(j \frac{\omega_1}{\omega_n}\right)^2}$$

Per trobar el valor de ξ , s'haurà de calcular mitjançant la fórmula de la freqüència de ressonància ω_r . Recuperant la fórmula de l'apartat 6.1.3:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad \text{per a } 0 \leq \xi \leq 0.707$$

O bé, utilitzant la fórmula del pic de ressonància. Recuperant-la de l'apartat 6.1.4:

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad \text{per a } 0 \leq \xi \leq 0.707$$

Utilitzant la primera s'obté:

$$\xi = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_n}\right)^2}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{692.8203}{707.1068}\right)^2}{2}} = 0.14142$$

Finalment, es pot expressar la funció de transferència $G(j\omega)$ com:

$$G(j\omega) = \frac{\left(1 + j\omega \frac{1}{5000}\right)}{1 + 2 \cdot 0.14142 \cdot \frac{j\omega}{707.1068} + \left(\frac{j\omega}{707.1068}\right)^2}$$

O bé com $G(s)$:

$$G(s) = 100 \cdot \frac{(s + 5000)}{(s^2 + 200 \cdot s + 500000)}$$

8.2. Pregunta 2

La funció de transferència obtinguda en la primera pregunta correspon a un circuit RLC (**Fig.163**). Suposant una inductància de 100 mH i que $R_1 = R_2 = R$, modelitza la planta $G(s)$.

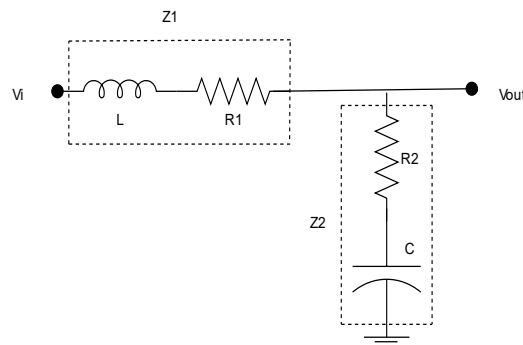


Fig. 163. Planta implementada, amb una bobina de 100 mH, dues capacitàncies de 10 μ F en paral·lel, impedància resultant de 20 μ F; i dues resistències de 10 Ω

Aplicant la fórmula del divisor de tensió a la Fig.163 s'obté la següent equació, recuperada de l'apartat 2.2:

$$G(s) = \frac{R_2}{L} \cdot \frac{(s + \frac{1}{C \cdot R_2})}{(s^2 + \frac{(R_1 + R_2)}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C})} = \frac{R}{L} \cdot \frac{(s + \frac{1}{C \cdot R})}{(s^2 + \frac{(2R)}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C})}$$

Equiparant aquesta expressió a l'obtinguda en l'anterior pregunta, s'obté:

$$\frac{R}{L} \cdot \frac{(s + \frac{1}{C \cdot R})}{(s^2 + \frac{(2R)}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C})} \equiv 100 \cdot \frac{(s + 5000)}{(s^2 + 200 \cdot s + 500000)}$$

Per tant, s'obté $R = 10 \, \Omega$ i $C = 20 \, \mu F$.

8.3. Pregunta 3

Generi dues gràfiques, la primera amb *Matlab* i la segona amb el simulador *Falstad*, comparant el senyal d'entrada $V_{in}(t)$ i la senyal de sortida $V_{out}(t)$ del sistema en llaç obert. Suposi que $V_{in}(t)$ és una senyal quadrada d'amplitud $0.35V$ i $1 \, Hz$.

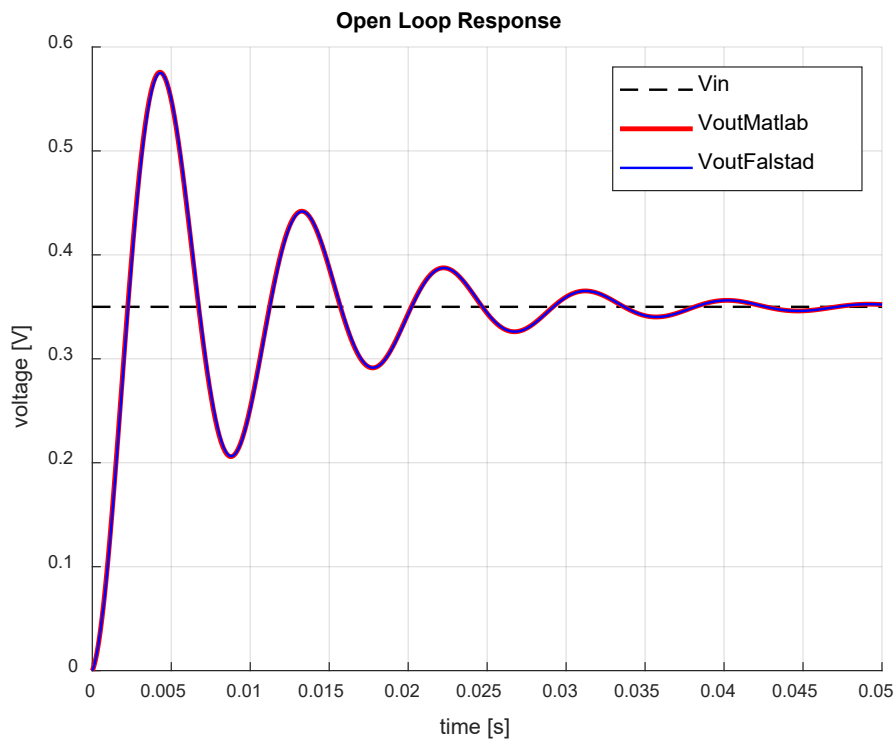


Fig. 164. Gràfica creada amb Matlab a partir de les dades obtingudes a les simulacions del llaç obert realitzades en els entorns Falstad i Matlab

8.4. Pregunta 4

Generi dues gràfiques, la primera amb *Matlab* i la segona amb el simulador *Falstad*, comparant el senyal d'entrada $V_{in}(t)$ i la senyal de sortida $V_{out}(t)$ del sistema enllaç tancat. Suposi que $V_{in}(t)$ és una senyal quadrada d'amplitud $0.35V$ i 1 Hz . A més a més, adjunti l'esquema equivalent de tancar el llaç analògicament junt amb la funció de transferència. Comenti les principals diferències dels resultats obtinguts.

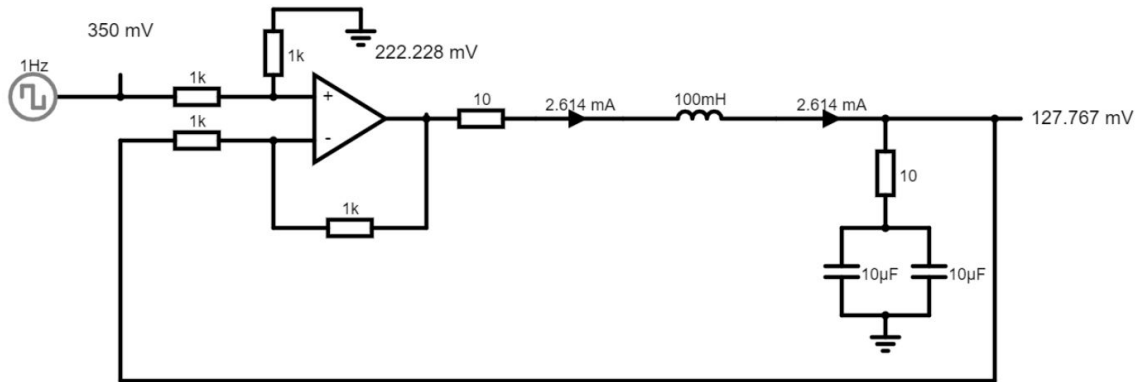


Fig. 165. Esquema realitzat amb el simulador del sistema enllaç tancat

La funció de transferència equivalent de tancar el llaç és:

$$G_{cl}(s) = 100 \cdot \frac{(s + 5000)}{(s^2 + 300 \cdot s + 1000000)}$$

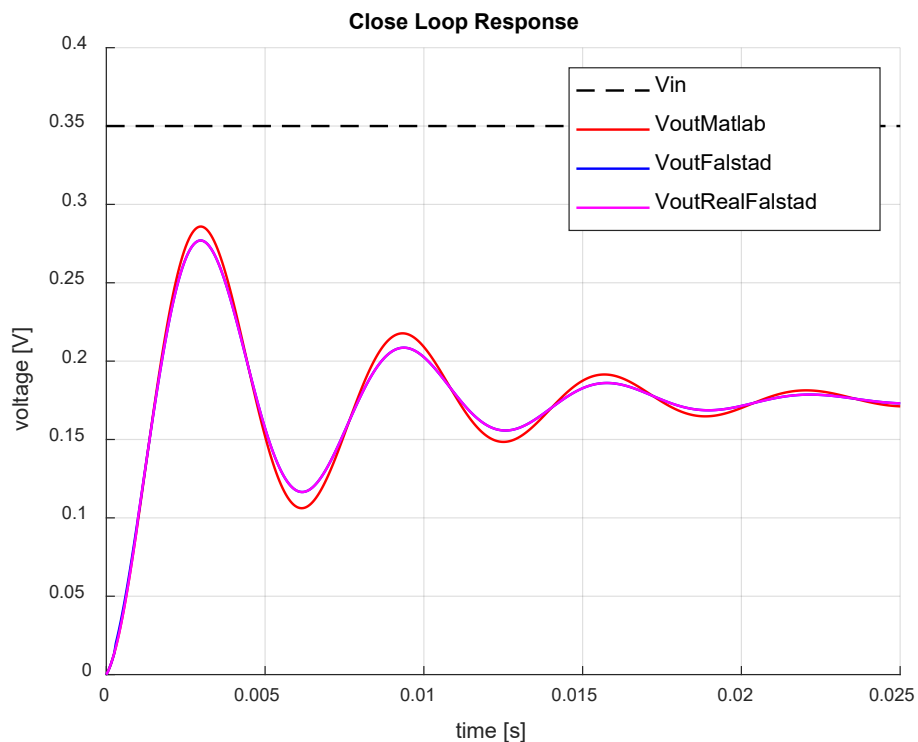


Fig. 166. Gràfica creada amb Matlab a partir de les dades obtingudes a les simulacions del llaç tancat realitzades en els entorns Falstad i Matlab

Després s'aplica la condició d'angle per trobar β_{c2} (z_{c2}) i la condició de mòdul per trobar el guany (K) del PID , obtenint d'aquesta manera $z_{c2} = -4000$ i $K = 0.0085$.

Fórmula condició angle:

$$180^\circ(2k + 1) = (\beta_1 + \beta_{c1} + \beta_{c2}) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_c)$$

Fórmula condició magnitud:

$$|PID(s) \cdot G(s)|_{s=p_{obj}} = 1$$

Per lo tant, l'expressió del controlador PID aplicat és:

$$PID(s) = 0.0085 \frac{(s + 1000)(s + 4000)}{s}$$

8.6. Pregunta 6

Mitjançant el model introduït per **K. Ogata**, determinar els valors de R_1, R_2, R_3, R_4, C_1 y C_2 .
Si $R_1 = 10 \text{ K}\Omega$, $C_1 = 10 \cdot C_2$ i $R_4 = 3.3 \cdot R_3$.

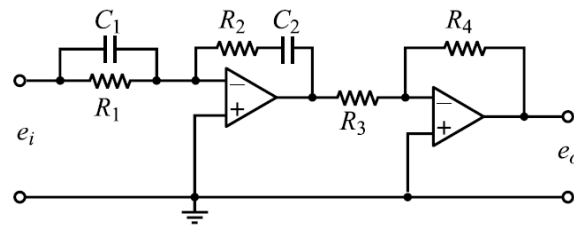


Fig. 168. Model del controlador PID presentat per Katsuhiki Ogata en el seu llibre *Ingeniería de Control Moderna*

Aplicant les lleis de *Kirchhoff* i les regles bàsiques dels amplificadors operacionals de la Fig. 8 s'obté l'expressió del PID en funció dels seus elements electrònics. Equiparant aquesta amb l'obtinguda a la pregunta 5 s'obté que $R_2 = 25 \text{ K}\Omega$, $R_3 = 1 \text{ K}\Omega$, $R_4 = 3\text{K}3 \Omega$, $C_1 = 100 \text{ nF}$ i $C_2 = 10 \text{ nF}$.

$$PID(s) = \frac{R_2 R_4 C_1}{R_3} \cdot \frac{(s + 1/R_1 C_1)(s + 1/R_2 C_2)}{s}$$

8.7. Pregunta 7

Generi dues gràfiques, la primera amb *Matlab* i la segona amb el simulador *Falstad*, comparant la senyal d'entrada $V_{in}(t)$ i la senyal de sortida $V_{out}(t)$ del sistema compensat. Suposi que $V_{in}(t)$ és una senyal quadrada d'amplitud $0.35V$ i 1 Hz . A més a més, adjunti l'esquema equivalent de tancar el llaç analògicament. Calculi l'error en estat estacionari i faci l'estudi d'estabilitat. Comenti les principals diferències dels resultats obtinguts.

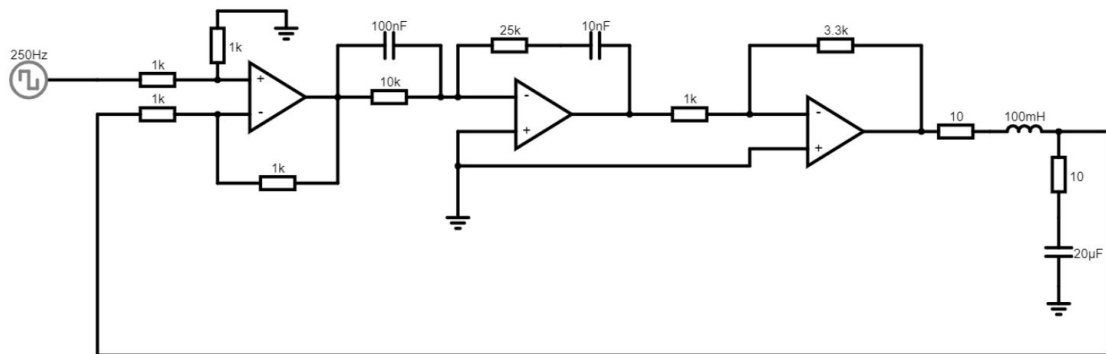


Fig. 169. Esquema realitzat amb el simulador del sistema controlat en llaç tancat

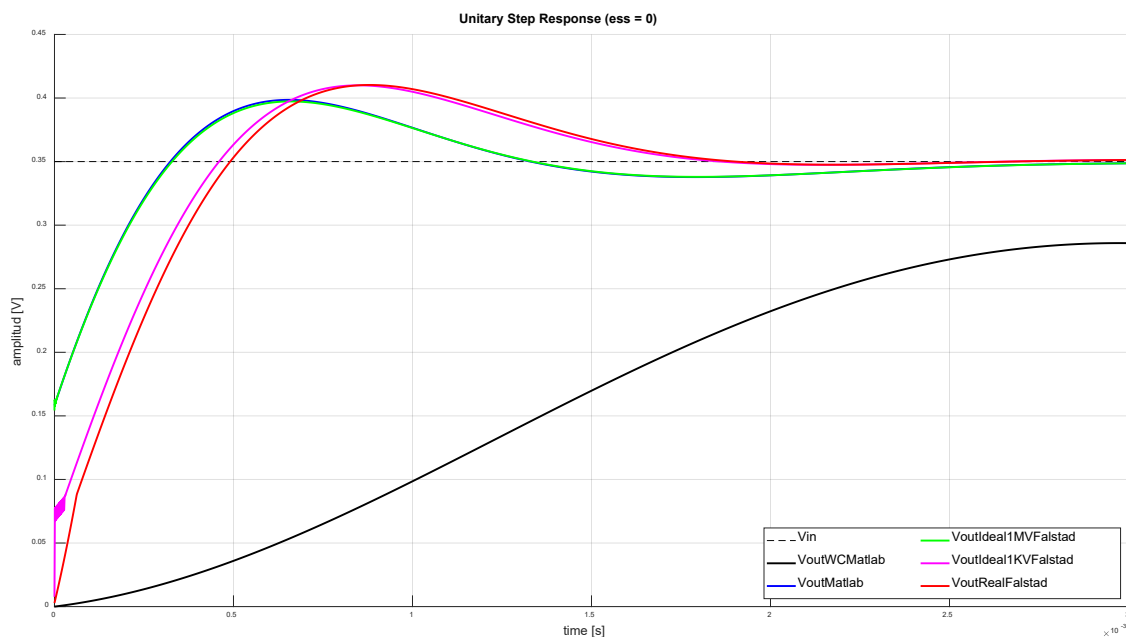


Fig. 170. Gràfica creada amb Matlab a partir de les dades obtingudes a les simulacions del sistema controlat en llaç tancat realitzades en els entorns Falstad i Matlab

Un cop tancat el llaç amb el controlador (Fig. 9) els estudiants podran observar que existeixen diferències envers la sortida $V_{out}(t)$ del sistema depenent del mètode emprat (Fig. 10). Aquestes es deuen al comportament dels amplificadors operacionals. Depenent del voltatge d'alimentació i del guany de l'amplificador, la sortida d'aquest es veu saturada.

En el simulador *Falstad*, es realitzaran tres simulacions diferents. En aquestes, es variarà la tensió d'alimentació i el guany de l'amplificador operacional. El comportament real de l'amplificador, l'obtindrem alimentant-lo amb una tensió de $\pm 12\text{ V}$ amb un guany de $200K$. La segona simulació correspon a un comportament ideal, amb l'amplificador alimentat amb $\pm 1\text{ KV}$ i amb un guany de 1 M ; i la tercera, també correspon a un comportament ideal, però en aquest cas amb l'amplificador alimentat amb $\pm 1\text{ MV}$.

En el *Matlab* realitzarem una simulació amb l'amplificador operacional amb comportament ideal.

Mètode	Temps d'assentament (t_s)[s]	Sobre elongació (M_p)[%]	Pic [V]	Temps de pic (t_p)[s]	e_{ss} (step)[V]
Matlab	0.0032	36.6362	0.4782267	0.00059293	0
Falstad	0.00325	42	0.4976	0.0006192	0

Taula 49. Comparativa de resultats del sistema compensat

Donat que el sistema controlat en llaç obert es de tipus 1, es pot afirmar que l'error en estat estacionari per a una entrada esglaó serà zero i l'error per una entrada rampa serà la definida en la següent equació:

$$e_{ss} = \frac{X}{K_v} = \frac{\frac{0.35[V]}{0.5[s]}}{\lim_{s \rightarrow 0} sPID(s)G(s)[s^{-1}]} = 20.588\text{ }\mu\text{V}$$

Realitzant la anàlisi d'estabilitat s'obté:

Controlador	Marges clàssics			Marge de disc $D(\alpha, \sigma)$		
	Marge de guany (K_g)[dB]	Marge de fase (γ)[°]	Desviació (σ)	Mida del disc (α)	Marge de guany [ud]	Marge de fase [°]
-	∞	33.8815	0	0.5904	[0.54416, 1.8377]	[-32.8931, 32.8931]
PID	∞	127.5	0	1.3685	[0.18746, 5.3345]	[-68.7651, 68.7651]

Taula 50. Comparativa de resultats anàlisi d'estabilitat

9. Conclusions

En aquest projecte es descriuen els materials i els mètodes emprats per dissenyar material docent de baix pressupost per pràctiques de Teoria Bàsica de Control.

Referint-se a l'objectiu principal del projecte, el qual era dissenyar i construir una placa electrònica de baix cost per implementar controladors P , PI , PD i PID ; es pot concloure que s'ha aconseguit a mitges.

A causa de la situació global en la qual ens hem trobat durant aquest darrer any, amb la pandèmia del *Covid-19*, ha sigut impossible accedir als laboratoris d'electrònica de les instal·lacions de la Universitat de Lleida per realitzar la fase experimental. Per aquest motiu, s'ha replantejat el projecte, adquirint un caràcter més teòric, introduint nous conceptes, com l'estudi d'estabilitat de sistemes mitjançant el marge de disc (*diskmargin*), i la implementació dels controladors en un sistema discret, mitjançant les equacions en diferències.

Tot i això, sempre s'ha volgut mantindre un caire pràctic, per aquest motiu s'han realitzat simulacions en entorns que ens permetessin apropar-nos al comportament real dels sistemes, mitjançant *Matlab* i *Falstad*.

Amb la idea d'una futura implementació de les plantes i els controladors dissenyats en el projecte, en els annexos es proposa la llista completa de materials. Aquesta ha sigut confeccionada assegurant un pressupost baix i competitiu. La quantitat de materials ha estat calculada per obtenir el nombre necessari de components per construir una unitat de cada planta amb els seus respectius controladors. La quantitat indicada en les taules dels components electrònics, *taula 51*, correspon a la comanda mínima realitzable, segons el distribuïdor.

En els annexos, també s'inclou el codi per a la implementació dels controladors mitjançant les equacions en diferències en la placa (*Arduino DUE*).

9.1.1. Futurs passos

El següent pas a realitzar en aquest projecte, seria implementar físicament les plantes i els controladors dissenyats prèviament.

Un cop implementats, es realitzarien les mateixes simulacions que les realitzades en els entorns *Matlab* i *Falstad*. Aquestes es compararien per observar les diferències envers les simulacions en l'entorn real i el real.

També, es realitzarien les simulacions corresponents a l'aplicació dels sistemes de control en un microprocessador. Aquestes es compararien amb les obtingudes anteriorment amb la placa electrònica. D'aquesta manera, com s'ha pogut observar en l'*apartat 7.4.* del projecte, obtindríem les gràfiques comparatives envers el sistema en règim continu i discret.

Finalment, l'últim pas, seria la realització per part de l'alumnat de l'assignatura de Teoria Bàsica de Control de les pràctiques. En els annexos hi ha present un model de pràctica on es combinen els mètodes *Matlab*, *simulador* i placa electrònica.

10. Referències

10.1.1. Bibliografia

Katsuhiko Ogata, "Ingenieria de control moderna, 5ª edición", *Pearson Education*, 2010.

Katsuhiko Ogata, "Sistemas de control en tiempo discreto, 2ª edición", *Prentice Hall*, 2000.

P. Seiler, A. Packard and P. Gahinet, "An Introduction to Disk Margins", April 9, 2020.

J.D. Blight, R.L. Dailey and D. Gangsaas, "Practical Control Law Design for Aircraft Using Multivariable Techniques." *International Journal of Control*. Vol 59, Number 1, 1994, pp.93-137.

G. Balas, R. Chiang, A. Packard and M. Safonov, "Robust Control Toolbox™, User's guide", *MathWorks*, Març 2020.

MATLAB ©, "Control System Toolbox™, User's Guide", *MathWorks*, Març 2020.

10.1.2. Webgrafia

Douglas, B. [Brian Douglas]. (2013, 13 de juliol). "Nyquist Stability Criterion, Part 1" [Arxiu de vídeo]. Recuperat de <https://www.youtube.com/watch?v=sof3meN96MA>

Douglas, B. [Brian Douglas]. (2020, 20 d' abril). "Robust Control, Part 2: Understanding Disk Margin" [Arxiu de vídeo]. Recuperat de <https://www.youtube.com/watch?v=XazdN6eZF80>

10.1.3. Pàgines web

Simulador web *Falstad* gratuït disponible en el següent enllaç (8/6/2020):

<http://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>

Descarrega gratuïta d'*Arduino IDE 1.8.12* en el següent enllaç (8/6/2020):

<https://www.arduino.cc/en/main/software>

Descarrega versió estudiant *MATLAB* en el següent enllaç (8/6/2020):

<https://es.mathworks.com/products/matlab/student.html>

Arduino DUE, descripció i opció de compra en el següent enllaç (8/6/2020):

<https://store.arduino.cc/arduino-due>

Distribuïdor online de components electrònics en Espanya en el següent enllaç (8/6/2020):

<https://es.rs-online.com/web/>

11. Annex I. Pressupost projecte

11.1. Components electrònics

Descripció	Identificador RS	Quantitat mínima [ud.]	Preu unitari[€/ud.]	Subtotal [€]
Amplificador Operacional	661-0454	20	0,316	6,32
Inductància	871-1521	6	2,66	15,96
Pin femella	425-822	65	0,792	51,48
Pin mascle	425-658	30	0,444	13,32
Pin placa	615-4850	50	0,149	7,45
Resistor	707-8580	10	0,02	0,2
Resistor	754-5642	5	0,422	2,11
Resistor	844-3929	1	0,81	5,67
Resistor	214-1787	10	0,094	0,94
Resistor	487-5022	15	0,882	13,23
Resistor	131-198	10	0,009	0,09
Resistor	844-3925	1	0,78	1,56
Resistor	188-6169	100	0,065	6,5
Resistor	131-261	10	0,023	0,23
Resistor	148-540	10	0,094	0,94
Resistor	707-8877	10	0,03	0,3
Resistor	132-567	10	0,046	0,46
Resistor	707-7690	10	0,125	1,25
Resistor	850-5547	1	1,24	1,24
Resistor	131-312	10	0,18	1,8
Resistor	850-6880	1	1,76	1,76
Resistor	125-1136	20	0,044	0,88
Resistor	844-3938	1	0,92	3,68
Resistor	707-8899	10	0,025	0,25
Resistor	849-9332	1	0,49	0,49
Resistor	830-7450	1	0,45	4,5
Resistor	843-7330	1	1,6	1,6
Resistor	148-843	10	0,03	0,3
Condensador No Polaritzat	298-0144	10	0,235	2,35
Condensador No Polaritzat	190-7671	5	0,122	0,61
Condensador No Polaritzat	108-2700	10	0,394	3,94
Condensador No Polaritzat	335-038	10	0,192	1,92
Condensador No Polaritzat	126-2258	10	2,454	24,54
Total components electrònics				177,87

Taula 51. Pressupost components plantes i controladors

11.2. Plaques PCB

Descripció	Quantitat [ud.]	Precio unitari [€/ud.]	Subtotal [€]
Placa PCB	5	20	100

Taula 52. Pressupost de la fabricació de les plaques PCB

Descripció	Quantitat [ud.]	Temps fabricació [h/ud.]	Preu hora [€/h]	Subtotal [€]
Placa PCB	5	0,5	20	50

Taula 53. Pressupost mà d'obra fabricació plaques PCB

11.3. Cost total

Descripció	Preu [€]
Components electrònics	177,87
Placa PCB (material)	100
Placa PCB (mà d'obra)	50
Total	327,87

Taula 54. Pressupost total

12. Annex II. Codi Arduino DUE: Implementació digital en equacions en diferències dels controladors

```
void control()
{
    // Selecció del controlador a aplicar
    switch(controlador){
        case '0': // Sense controlador
            // Senyal de control
            uo = err;
            break;
        case '1': // Control Proporcional
            // Senyal de control
            uo = kp*err;
            break;
        case '2': // Control Proporcional - Derivatiu
            // Variables
            a = (kd/Ts)+kp;
            b = (-kd/Ts);
            // Senyal de control
            uo = a*err + b*err1;
            break;
        case '3': // Control Integral
            // Variables
            a = (2*ki)/Ts;
            // Senyal de control
            uo = a*err + a*err1 + uo1;
            break;
        case '4': // Control Proporcional - Integral
            // Variables
            a = kp + ((ki*Ts)/2);
            b = ((ki*Ts)/2)-kp;
            // Senyal de control
            uo = a*err + b*err1 + uo1;
            break;
        case '5': // Control Proporcional - Integral - Derivatiu
            // Variables
            a = kp + (ki*Ts/2)+(kd/Ts);
            b = -kp + (ki*Ts/2) - (2*kd/Ts);
            d = kd/Ts;
            // Senyal de control
            uo = a*err + b*err1 + d*err2 + uo1;
            break;
    }
    // Senyals de control i d'error anteriors
    err2 = err1;
    err1 = err;
    uo1 = uo;
}
```